



Ondes de torsion dans le noyau terrestre

Gédéon Legaut

► To cite this version:

Gédéon Legaut. Ondes de torsion dans le noyau terrestre. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT: . tel-00011706

HAL Id: tel-00011706

<https://theses.hal.science/tel-00011706>

Submitted on 1 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
LABORATOIRE DE GEOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

Thèse

présentée par

Gédéon LÉGAUT

le 14 octobre 2005

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier

spécialité : **Géophysique**

Ondes de torsion dans le noyau terrestre

Composition du jury :

Mioara Mandea	Centre de Recherche Géophysique (Potsdam)	Rapporteur
Andrew Jackson	Université de Leeds (Angleterre)	Rapporteur
Michel Campillo	Université Joseph Fourier (Grenoble)	Examineur
Yannick Ponty	Observatoire de la Côte d'Azur (Nice)	Examineur
Dominique Jault	Université Joseph Fourier (Grenoble)	Directeur de thèse

Table des matières

Introduction	15
------------------------	----

PARTIE I

Introduction géophysique – Données magnétiques

1 Le champ magnétique terrestre	21
1.1 Vers un modèle de Terre simplifié	21
1.1.1 Le géoïde terrestre	21
1.1.2 La frontière noyau-manteau	21
1.1.3 La frontière graine-noyau	22
1.2 Développement en harmoniques sphériques	23
1.3 Le champ magnétique d'origine externe	24
1.3.1 L'anneau de courant magnétosphérique	24
1.3.2 Les systèmes de courant ionosphériques	26
1.3.3 L'électrojet équatorial	27
1.3.4 Les anneaux auroraux conjugués	28
1.3.5 Couplage des différents systèmes de courant	29
1.4 Le champ magnétique d'origine interne	30
1.4.1 La convection dans le noyau et la dynamo	30
1.4.2 Les jerks	32
1.4.3 La conductivité du manteau	39
1.4.4 La conductivité du manteau et du noyau en laboratoire	43
1.5 Séparation fréquentielle des parties interne – externe	44
1.6 Modélisations du champ magnétique terrestre	44
1.7 Conclusions	45
2 Données magnétiques à grande période	47
2.1 Transformée de Fourier	47
2.1.1 Facteur de normalisation	47
2.1.2 Spectre brut de \dot{Y} à CLF	49
2.1.3 Fenêtres de pondération	50
2.1.4 Calibrage sur le nombre de Wolf	54
2.1.5 Spectres apodisés de la variation du champ magnétique	56

2.1.6	Les longues séries de Paris	59
2.2	Filtrage par moyenne glissante	61
2.2.1	Harwood et Malin	61
2.2.2	Cycle à 11 ans sur la composante Y	62
2.2.3	Cycle à 22 ans sur la composante Y	62
2.3	Conclusions	68

PARTIE II

Les Ondes de Torsion

3	Les équations du manteau et du noyau	75
3.1	Les équations de l'électromagnétisme	75
3.1.1	Les équations de Maxwell	75
3.1.2	La loi d'Ohm	76
3.2	Cas du manteau isolant	77
3.3	Cas du manteau conducteur	77
3.3.1	Equation de l'induction pour un manteau conducteur	78
3.3.2	Champ magnétique inducteur	79
3.3.3	Champ magnétique d'origine interne	80
3.4	Les équations de la mécanique des fluides	84
3.4.1	La conservation de la masse	85
3.4.2	Gradient adiabatique	87
3.4.3	Equation de Navier-Stokes	88
3.5	Les équations générales	90
3.6	Le rôle de la force de Coriolis sur la dynamique du noyau	91
3.6.1	Théorème de Proudman - Taylor	91
3.6.2	Temps de propagation de la contrainte de Taylor dans le noyau	92
3.7	La contrainte de Taylor	93
3.8	Les ondes MAC	95
3.9	Vers les ondes de torsion	96
4	Les ondes de torsion	97
4.1	Propriétés générales des ondes d'Alfvén	97
4.2	Ondes d'Alfvén et ondes de torsion	100
4.3	Le mécanisme physique des ondes d'Alfvén	100
4.4	Prise en compte des effets hydrodynamiques, géométrie cartésienne	101
4.4.1	Excitation mécanique	102
4.4.2	Excitation électromagnétique	102
4.4.3	Comparaison des excitations	104
4.5	Voir les ondes d'Alfvén	104
4.5.1	... dans les codes dynamo	104

4.5.2	... dans les expériences	105
4.5.3	Excitation expérimentale avec un champ magnétique oscillant	105
4.6	L'équation d'onde des ondes de torsion	107
4.6.1	Équation de la dynamique	107
4.6.2	Champ magnétique induit par les ondes de torsion	108
4.6.3	L'équation d'onde	108
4.6.4	Conditions aux limites	115
4.6.5	Période des ondes de torsion	115
4.6.6	Direction de propagation	116
4.7	Conclusions	117
5	Propagation dans le noyau terrestre	119
5.1	Modèle de champ magnétique interne au noyau	119
5.1.1	Choix d'un champ dans le noyau	119
5.1.2	Vérification de la contrainte de Taylor	120
5.2	Approche numérique de la propagation	121
5.2.1	Code 1D sans graine (GeD)	121
5.2.2	Le champ principal dans l'équation d'onde	122
5.2.3	Résolution de l'équation d'onde	125
5.2.4	Premiers résultats	127
5.2.5	Les codes OTsg et OTg	128
5.2.6	Diagnostics des codes	132
5.3	Vers des codes OTxx non zonaux	132
5.4	Amplifications	134
5.5	A l'intérieur du cylindre tangent	135
5.6	Etude de la propagation en fonction de la conductivité du manteau	136
5.7	Variation séculaire due aux ondes de torsion	139
5.8	Vers une inversion	139

PARTIE III

Un mécanisme d'excitation des ondes de torsion

6	Réponse du noyau à des courants externes	145
6.1	Les anneaux de courants externes	145
6.1.1	Modélisation d'un anneau de courant	145
6.1.2	Comparaison des anneaux de courants	148
6.2	Réponse d'un noyau solide à une excitation externe	149
6.3	Prise en compte des effets hydrodynamiques, géométrie sphérique	152
6.4	Le code IMPULse	154
6.5	Résultats	156
6.5.1	Excitation à l'équateur	156

6.5.2	Propagation vers le coeur du noyau	156
6.5.3	A l'intérieur du cylindre tangent	157
6.5.4	Amplitude des vitesses géostrophiques	157
6.5.5	Manteau conducteur	160
6.6	Conclusions	161
Conclusions et perspectives		163
PARTIE IV		
Annexes		
A	Notations	167
B	Changement de référentiel	169
B.1	Rotation de θ_0	169
B.2	Expression de $(\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi$	172
B.3	Expression d'un champ de vecteur dans le nouveau repère	172
C	Fonctions de Bessel sphériques	173
C.1	Définition	173
C.2	Convention de signe	173
C.3	Relations de récurrence	174
C.4	Comportement asymptotique à l'origine	174
C.5	Expression en terme de fonctions élémentaires	174
C.6	Fonctions de Bessel sphériques d'un argument complexe	175
C.7	Valeurs numériques	176
D	Champ magnétique et coordonnées sphériques	177
D.1	Décomposition toroïdale-poloïdale	177
D.2	Opérateur de moment cinétique L^2	178
D.3	Champ magnétique poloïdal	178
Bibliographie		179

Table des figures

1.1	Modèle de Terre simplifié présentant les trois enveloppes que sont la graine ($r = 1221$ km), le noyau ($r = 3480$ km) et le manteau ($r = 6371$ km), ainsi que leur principale composition. Les trois coquilles sont à l'échelle.	22
1.2	Lignes de champ magnétique dans le plan méridien midi-minuit de l'anneau de courant [Hilmer et Voigt, 1995].	25
1.3	Contours de densité de courant (nA.m^{-2}). L'anneau de courant de la figure 1.2 a été combiné avec un courant de traversée de queue [Hilmer et Voigt, 1995].	26
1.4	Equateur magnétique obtenu à partir du modèle <i>gufm1</i> 1890 (pointillé) et en 1990 (trait plein), avec la station magnétique où fut découvert l'électrojet équatorial. Aux Amériques, l'équateur magnétique remonte vers le nord à la vitesse de 1 degré tous les dix ans [Jadhav <i>et al.</i> , 2002].	27
1.5	Densité de courant surfacique (A.m^{-1}) en fonction de la latitude par rapport à l'équateur magnétique [Lühr <i>et al.</i> , 2004]. La partie centrale est un courant allant vers l'est trois fois supérieur aux courants de retour. La densité moyenne des courants est fortement corrélée à la moyenne mensuelle de l'index du flux solaire F10.7 [Lühr <i>et al.</i> , 2004].	29
1.6	Schéma de l'interaction des anneaux de courant auroraux avec les autres systèmes de courants [Sizova, 2002]. B_z est la composante verticale du champ magnétique interplanétaire.	30
1.7	Vue des anneaux auroraux conjugués.	31
1.8	Vues des anneaux auroraux de Jupiter, prouvant qu'il y a un champ magnétique sur cette planète.	31
1.9	L'oval auroral est situé au dessus du Canada.	31
1.10	Différentes vues de l'oval auroral.	31
1.11	Schéma des différents systèmes de courants, montrant en particulier le couplage entre le système de courant auroral et l'anneau de courant [Alexeev, 2001].	32
1.12	Composante horizontale du champ magnétique (nT) en fonction du temps (années) dans les observatoires de Cheltenham et Fredericksburg. Les nombres au-dessus des barres verticales donnent l'amplitude du saut de la variation séculaire en nT/an, tandis que les autres nombres donnent la valeur de la pente supposée constante entre deux sauts, toujours en nT/an [Alldredge, 1975].	33
1.13	Moyenne annuelle du nombre de tâches solaires N , avec le minimum de Maunder sous le règne du roi soleil.	34
1.14	Composante X (nT/an) de la variation séculaire à Chambon-La-Forêt	35

1.15	Composante Y (nT/an) de la variation séculaire à Chambon-La-Forêt	35
1.16	Composante Z (nT/an) de la variation séculaire à Chambon-La-Forêt	35
1.17	Histogramme des dates des jerks détectés [Alexandrescu <i>et al.</i> , 1996]. Sept groupes peuvent identifiés aux alentours de 1901, 1913, 1925, 1932, 1949, 1969 et 1978.	36
1.18	Courbes de variation séculaire de la composante Y du champ magnétique à NKG. Les points représentent les données (moyennes mensuelles), tandis que sont représentées en trait plein diverses contributions du modèle CM4 [Sabaka <i>et al.</i> , 2004]. En haut : contribution du noyau seulement. Au milieu : noyau et champ induit. En bas : noyau, champ induit et champ externe.	37
1.19	Compilation de la réponse C (parties réelle et imaginaire) obtenue par différents auteurs [Olsen, 1999].	40
1.20	Profil radial moyen de conductivité obtenu par Constable et Constable [2004].	42
1.21	Amplitude du champ magnétique induit dans le manteau rapportée au champ inducteur (supposé uniforme) de l'anneau de courant magnétosphérique lors d'un orage magnétique [Constable et Constable, 2004]. On distingue le contraste continent-océan à cette échelle de temps.	43
2.1	Spectre <i>brut</i> de la variation séculaire de la composante Y de Chambon-La-Forêt (CLF). 48	
2.2	Spectre brut de la variation séculaire de la composante Y de Chambon-La-Forêt (CLF). 49	
2.3	Agrandissement de la Fig. 2.2 aux basses fréquences. L'abscisse est en échelle logarithmique (en an^{-1}).	50
2.4	Fenêtre de Hamming (trait plein) et BH4 (+) avec (b) ou sans (a) le facteur de correction de perte d'énergie pour un signal de durée 120 ans.	52
2.5	Spectre sismique synthétique, d'une durée de 20 heures, échantillonné toutes les 20 secondes, avec (b) et sans (a) fenêtre BH4. Les traits verticaux correspondent aux fréquences théoriques des pics. En abscisse, la fréquence en mHz.	53
2.6	Spectre du nombre de Wolf, pour différentes longueurs de la série de données et différentes fenêtres d'apodisation.	55
2.7	Spectre de la variation séculaire du champ magnétique à Chambon-La Forêt. Hamming (trait plein) et BH4 (+).	57
2.8	Zoom de la Fig. 2.7. Hamming (trait plein) et BH4 (+).	58
2.9	Spectre de l'inclinaison. Hamming (trait plein) et BH4 (+). En abscisse, la fréquence (en an^{-1}).	60
2.10	Spectre de la déclinaison. Hamming (trait plein) et BH4 (+). En abscisse, la fréquence (en an^{-1}).	61
2.11	Signal $\text{RV}_{3,11}(H)$ pour les cinq stations citées. Les pointillés ne sont là que pour une meilleure lecture.	63
2.12	Signal $\text{RV}_{3,11}(Z)$ pour les cinq stations citées.	64
2.13	Signal $\text{RV}_{3,11}(Y)$ à différentes stations.	65
2.14	Signal $\text{RV}_{3,11}(X)$ (en trait plein, nT) et le signal $\text{RV}_{3,11}(Y)$ (+, nT) à Sitka (code iaga SIT).	66
2.15	Signal $\text{RV}_{3,22}(Y)$ à différentes stations.	67

2.16	Signal $RV_{3,22}(Y)$ à Chambon-La-Forêt (en trait plein, nT), sa dérivée temporelle (o, nT/an) et la variation séculaire de la composante Y à CLF (+, nT/an) shiftée de 40 nT/an vers le bas.	68
2.17	Signal $RV_{3,22}(Y)$ à HON (en trait plein, nT), sa dérivée temporelle (+, nT/an).	69
2.18	Signal $RV_{3,22}(X)$ à Chambon-La-Forêt (en trait plein, nT), sa dérivée temporelle (o, nT/an) et la variation séculaire de la composante X à CLF (+, nT/an) décalée de 60 nT/an vers le bas.	70
2.19	Signal $RV_{3,22}(Z)$ à Chambon-La-Forêt (en trait plein, nT), sa dérivée temporelle (o, nT/an) et la variation séculaire de la composante X à CLF (+, nT/an) décalée de 60 nT/an vers le bas.	70
2.20	Dérivées temporelles du signal $RV_{22,3}(Y)$ à Chambon-La-Forêt (en trait plein, nT/an) et du signal $RV_{11,3}(Y)$ (+, nT/an) à Chambon-La-Forêt.	71
2.21	Dérivées temporelles du signal $RV_{22,3}(Y)$ à Chambon-La-Forêt (en trait plein, nT/an) et du signal $RV_{22,11}(Y)$ (o, nT/an) à Chambon-La-Forêt.	71
3.1	Modèle de conductivité. Les mouvements dans le noyau sont négligés (a) ou non (b).	80
3.2	Quantité (3.35) en fonction du rayon sphérique r . Partie réelle (trait plein) et imaginaire (+) pour $\sigma_c = 4.46 \cdot 10^5$ S. Partie réelle (pointillé) et imaginaire (o) pour $\sigma_c = 1.48 \cdot 10^6$ S.	83
3.3	Schéma d'un cylindre géostrophique de rayon s et de hauteur $h = 2z_T$	92
3.4	Variations de la longueur du jour (en ms) de 1962 à 2004 [Holme et de Viron, 2004].	93
4.1	Etude des ondes d'Alfvén sur un cas simple [Roberts, 1967].	98
4.2	Représentation schématique de la rotation différentielle de deux cylindres géostrophiques.	100
4.3	Partie azimutale de la vitesse (en km.an^{-1}) extérieure au cylindre tangent ($0.35 < s < 1$) en fonction du temps (en milliers d'années), constante le long de cylindres géostrophiques, dont la valeur moyenne a été soustraite [Dumberry et Bloxham, 2003].	105
4.4	Courbe de résonance obtenue par Jameson [1964] lors de la mise en évidence expérimentale des ondes d'Alfvén avec du sodium liquide. M est l'inductance mutuelle entre la bobine imposant un champ magnétique uniforme dans le sodium liquide et la bobine de mesure.	106
4.5	Notations utilisées.	107
5.1	Convergence de la fonction $\{B_s^2\}(s)$ (en mT^2) en fonction du degré de troncature l^* du développement en harmoniques sphériques. Le degré $l^* = 8$ est choisi par la suite. En abscisse, le rayon cylindrique s	123
5.2	Fonction $\{B_s^2\}(s)$ (en mT^2) en fonction du rayon cylindrique s obtenue à partir des coefficients publiés dans [Backus <i>et al.</i> , 1996, p 139] du modèle MGST de 1980 pour un noyau sans graine (trait plein) et pour un noyau avec graine (hémisphères nord (croix) et sud (cercle)).	124
5.3	Schéma espace-temps des grilles utilisées pour résoudre l'équation différentielle.	126
5.4	Onde de torsion enregistrée en $s = 0.75 c$ au cours du temps (en années).	128
5.5	Transformée de Fourier de l'onde de torsion présentée Fig. 5.4. En abscisse, la fréquence en an^{-1} (ordonnée adimensionnée). Le pic principal correspond à une période de 16.2 an.	128

5.6	Propagation d'une onde de torsion dans tout le noyau (avec ou sans graine) au cours du temps (en années). L'échelle de couleur donne la valeur de l'amplitude de l'onde ω_g . Le même profil initial a été utilisé dans les deux cas. Dans le cas avec graine, la partie extérieure au cylindre tangent est la même dans les deux parties de l'image. Cette partie est complétée par la partie interne au cylindre tangent dans l'hémisphère précisé par <i>Nord</i> ou <i>Sud</i>	129
5.7	Courbes $\{B_s^2\}$ (en mT^2) en fonction du rayon cylindrique s . Le champ dynamo est axi-symétrique (+) ou il contient aussi les termes non zonaux (en trait plein, les coefficients sont ceux publiés dans [Backus <i>et al.</i> , 1996, p 139], $l^* = 8$).	133
5.8	Onde de torsion $\omega_g(s)$ au temps $t = 28$ ans en fonction du rayon cylindrique s avec un champ dynamo zonal (trait plein) ou non (+) correspondant aux valeurs de la Fig. 5.7.	134
5.9	Onde de torsion présentée Fig. 5.4 en fonction du rayon cylindrique s cette fois, au bout de 8 ans (pointillé) et 66 ans (trait plein). Profil initial (+).	135
5.10	Hauteur d'un cylindre géostrophique $h(s)/c$ en fonction du rayon cylindrique s en présence d'une graine de rayon $0.35c$	136
5.11	Onde de torsion ω_g dans un noyau avec graine, à différents temps, en fonction du rayon cylindrique s , dans les hémisphères Nord (+) et Sud (o) pour le profil initial (5.11).. La flèche indique le sens de la propagation.	137
5.12	Propagation à l'intérieur du cylindre tangent, dans les hémisphères Nord (+) et Sud (o) pour le profil initial (5.11). En abscisse, le rayon cylindrique s	138
5.13	Moment cinétique normalisé L à l'unité en l'absence de dissipation (trait plein) en fonction du temps (en années). La conductance $\sigma_m \Delta$ de la couche conductrice à la base du manteau est de $3.4 \cdot 10^6$ S (o), $3.4 \cdot 10^7$ S (pointillé), $3.4 \cdot 10^8$ S (+) et $3.4 \cdot 10^9$ S (Δ).	139
5.14	Variation séculaire (T.an^{-1}) due aux ondes de torsion à Chambon-La-Forêt (CLF) et dans l'île Macquarie au cours du temps (en années) avec le profil initial (5.11). B_r (trait plein), B_θ (+) et B_ϕ (o).	140
5.15	Spectre (T^2) de la variation séculaire associée à une onde de torsion en fonction du degré l des harmoniques sphériques, après une évolution pendant 60 ans du profil initial (5.11). La forme du spectre varie au cours du temps.	141
5.16	Quantités $s^3 z_T \frac{\partial \omega_g}{\partial s}$ (+) et $\int_0^s s^3 z_T \frac{\partial^2 \omega_g}{\partial t^2} ds$ (trait plein) en fonction du rayon cylindrique s	142
6.1	Schéma et notations d'un anneau de courant.	146
6.2	Champ magnétique (en nT) en fonction de la colatitude ($^\circ$), créé par les anneaux auroraux conjugués : composante radiale (trait plein), orthoradiale (+) et azimutale (pointillé). La composante orthoradiale a été décalée de -20 nT pour une meilleure lecture.	147
6.3	Composante $b_{e,\theta}$ (nT) à la surface du noyau en fonction de la colatitude ($^\circ$) pour l'anneau de courant magnétosphérique (trait plein), les anneaux auroraux (+) et l'électro-jet équatorial (pointillé), dans le référentiel terrestre.	149
6.4	Coupe équatoriale de la frontière noyau-manteau.	152
6.5	Projection du dipôle \vec{d} en sa partie équatoriale (\vec{d}_e) et axiale (\vec{d}_z).	152

6.6	Evolution au cours du XX ^{ème} siècle de la partie du champ dynamo ($m = 1$) parallèle au dipôle équatorial ($B_{0, //}$, en nT), calculée avec <i>gufm1</i> ($l^* = 13, +$) et <i>CM4</i> ($l^* = 13$, trait plein) ou ($l^* = 11$, pointillé). l^* est le degré de troncature du développement. . .	153
6.7	Evolution au cours du XX ^{ème} siècle de la partie du champ dynamo ($m = 1$) orthogonale au dipôle équatorial ($B_{0, \perp}$, en nT), calculée avec <i>gufm1</i> ($l^* = 13, +$) et <i>CM4</i> ($l^* = 13$, trait plein) ou ($l^* = 11$, pointillé). l^* est le degré de troncature du développement. . .	154
6.8	Réponse impulsionnelle d'un noyau avec graine au mécanisme d'excitation au cours du temps (en années). L'échelle de couleur donne la valeur de l'amplitude de l'onde ω_g à un facteur 10^{-12} près. La partie extérieure au cylindre tangent est la même dans les deux parties de l'image. Cette partie est complétée par la partie interne au cylindre tangent dans l'hémisphère précisé par <i>Nord</i> ou <i>Sud</i>	157
6.9	Réponse impulsionnelle du noyau à différents temps proches de zéro, en fonction du rayon cylindrique s . La flèche indique le sens de propagation.	158
6.10	Pénétration de la perturbation magnétique radiale (réponse impulsionnelle), dans le plan méridien perpendiculaire au dipôle équatorial \vec{d}_e ($\phi = 20^\circ$), à différents instants, pour un noyau de conductivité $7.5 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$. Echelle des couleurs : rouge pour les valeurs positives, vert pour les valeurs négatives et jaune proche de zéro. Les valeurs en rouge et en vert sont du même ordre de grandeur. Les valeurs n'ont pas de sens immédiat car il faut convoluer cette réponse impulsionnelle par un signal à la bonne période pour avoir l'amplitude de la perturbation magnétique.	159
6.11	Réponse impulsionnelle du noyau à $t = 23.8$ ans, en fonction du rayon cylindrique s . Hémisphère Nord (+) et Sud (o).	160
6.12	Réponse impulsionnelle pour ω_g en $s = 0.5$ en fonction du temps (en années).	160
B.1	Mouvement de l'axe du dipôle tous les 30 ans depuis 1600, calculé à partir du modèle <i>gufm1</i> , dans la région du Groënland (abscisse longitude Est, ordonnée latitude). . . .	170
B.2	Le méridien de Greenwich est dans le plan ($x'Oz'$).	171
B.3	Déphasage de ϕ_0 en longitude. (Pour les notations, cf Fig. B.2).	171

Liste des tableaux

1.1	Conductivité (en S.m^{-1}) à différentes profondeurs par différents auteurs.	41
6.1	Valeurs retenues pour les différents anneaux : l'intensité I , la hauteur h et le demi-angle au sommet θ_c (colatitude).	148
6.2	Développement en harmoniques sphériques du champ magnétique créé par l'anneau de courant magnétosphérique à la surface de la Terre dans le référentiel géomagnétique.	149
6.3	Coefficients du développement en harmoniques sphériques du potentiel magnétique externe de l'anneau de courant magnétosphérique dans le référentiel terrestre.	150
6.4	Amplitudes de $c\omega_g$ (en m.s^{-1}) pour trois valeurs du rayon s de la perturbation ($l = 1$, $m = 1$). Les coefficients α_0 et α interviennent dans le champ dynamo (6.5).	158
6.5	Amplitudes de $c\omega_g$ (en m.s^{-1}) pour trois valeurs du rayon s de la perturbation ($l = 2$, $m = 1$). Les coefficients α_0 et α interviennent dans le champ dynamo (6.5).	158
6.6	Réponse magnétique (g_l^m, h_l^m) à la surface de la Terre dans les observatoires pour un champ inducteur (q_l^m, s_l^m) et une réponse du noyau ($g_{l,c}^m, h_{l,c}^m$) déterminée par le code IMPULse. Les coefficients (q_1^1, s_1^1) représentent une perturbation externe d'amplitude 4 nT. Les coefficients sont en nT.	162

Remerciements . . .

Trois années, une famille, un laboratoire, une équipe scientifique, une équipe de foot . . . voilà comment décrire grossièrement cette thèse !

Merci pour ton soutien pendant ces trois années, Coralia, malgré une rédaction intensive. Tes sourires, ta bonne humeur m'ont souvent encouragés, Ewan ! Merci chérie, merci mon petit bonhomme !

J'ai apprécié ces trois années de collaboration, Dominique, malgré la difficulté à comprendre tes programmes. Tu as été, à plusieurs reprises, un exemple pour moi : un grand merci !

J'ai travaillé au sein d'une équipe super, tant sur le plan humain que scientifique : merci à Philippe, Henri-Claude, Daniel, Jean-Paul, Denys, Thierry, Céline, Nicolas, Bérangère, Nathanaël, Alexandre . . .

Je sais ! Si je continue en disant que le laboratoire était super, vous allez penser que c'était la thèse idéale : c'est vrai ! J'ai apprécié d'être entouré de personnes prêtes à donner un coup de main. Merci donc à nos ingénieurs informatiques Catherine, Ghislain et Martial. Merci aux secrétaires France, Martine, Jacques et Karine et à chacun au LGIT.

Les réunions de labo sur la pelouse me resteront longtemps en tête ! Désolé, Philippe, tu n'auras plus beaucoup l'occasion de me faire un petit pont. Révérence, Maître Manu. Comme toujours, la loi du thésard au foot s'est encore vérifiée : l'endurance est inversement proportionnelle au temps passé à écrire sa thèse . . . il faudra que je revienne faire un match ! Merci à tous.

Merci Alexandra Pais et Céline pour m'avoir aidé à obtenir les coefficients des champs de vitesse et magnétique à la surface du noyau ! Merci Nils Olsen pour les discussions qu'on a pu avoir, ainsi que pour tes codes qui m'ont permis de tester les miens.

Octobre 2005

Gédéon Légaut

Les variations décennales du champ magnétique terrestre et en particulier celles de la composante Est de sa variation séculaire (cf Fig. (1.15)) sont énigmatiques. Dans les observatoires magnétiques européens, cette dernière semble en effet pouvoir être représentée, au premier abord, par une succession de segments de droite ; deux segments consécutifs étant séparés par une secousse géomagnétique ou « jerk » [Courillot *et al.*, 1978].

L'origine de ces variations semble interne [Courillot *et al.*, 1978; Malin et Hodder, 1982] et les tentatives pour leur trouver une origine externe n'ont pas abouti [Alldredge, 1984, 1985; Nagao *et al.*, 2002].

Or, il a peu de candidats à l'intérieur de la Terre dont la période caractéristique soit décennale, en supposant qu'un phénomène ondulatoire en soit la cause : les ondes de Rossby associées à une topographie d'amplitude $h \sim 1$ km à la frontière noyau-manteau, qui ont pour période $2\pi/(\Omega h/c)$ [Braginsky, 1970; Jault, 2003] (Ω est la pulsation de la Terre et c le rayon du noyau) ; et les ondes d'Alfvén associées aux mouvements géostrophiques dans le noyau (ci-après appelées *ondes de torsion*) [Braginsky, 1970].

Dans les années 1950, Hannes Alfvén, un ingénieur suédois, prédit l'existence d'ondes magnétiques dans les milieux conducteurs d'électricité baignant dans un champ magnétique ambiant. De tels milieux se rencontrent très fréquemment dans les différentes étoiles, dans les plasmas, comme l'ionosphère terrestre, et dans les planètes elles-mêmes, quand une de leur partie est conductrice d'électricité et qu'un processus dynamo y génère un champ magnétique, comme c'est le cas du noyau de notre planète. L'étude des ondes d'Alfvén dans une sphère en rotation rapide – ondes de torsion – a été initiée par Braginsky [1970], l'année où H. Alfvén reçut le prix Nobel pour ses travaux en magnétohydrodynamique. Une étude linéaire des ondes pouvant se propager dans une sphère en rotation rapide baignée par un champ magnétique constant révèle deux familles d'ondes. Les ondes de torsion, sujet de cette thèse, évoluent sur une à plusieurs décennies, tandis que les ondes MAC, qui évoluent sur quelques milliers d'années, participeraient au processus dynamo qui maintient le champ magnétique de notre planète.

Toutes ces ondes induisent, par leur propagation dans le noyau, un champ magnétique qui participe au champ magnétique observé à la surface de la Terre. Ces ondes témoignent ainsi du champ magnétique à l'intérieur même du noyau liquide de la Terre alors que les mesures magnétiques effectuées à la surface de la Terre ne permettent de remonter, sous certaines hypothèses, qu'au champ magnétique à la surface du noyau. En particulier, la propagation des ondes dépend de la quantité $\{B_s^2\}$, moyenne sur la surface d'un cylindre – aligné avec l'axe de rotation – du carré de la composante magnétique perpendiculaire à l'axe de rotation.

Après leur mise en évidence [Braginsky, 1970], les ondes de torsion ont été peu étudiées. Ce n'est que récemment qu'elles ont été reprises, grâce entre autre, aux travaux de Zatman et

Bloxham [1997] : le champ de vitesse à la surface du noyau – du moins sa partie symétrique par rapport au plan équatorial dont la moyenne temporelle a été enlevée – a été représenté par deux ondes de torsion stationnaires [Zatman et Bloxham, 1997, 1998, 1999] pour la période 1900-1990, en supposant que tous les mouvements géostrophiques du noyau étaient des ondes de torsion. Il est en effet possible de prolonger en profondeur par des ondes de torsion le champ de vitesse à la surface du noyau déduit des observations magnétiques [Jault *et al.*, 1988; Jackson *et al.*, 1993] sur des échelles de temps décennales. Les deux ondes de torsion obtenues ont été utilisées pour obtenir un premier modèle de $\{B_s\}$ [Zatman et Bloxham, 1997, 1998]. Celui-ci, caractérisé seulement en dehors du cylindre géostrophique s'appuyant sur la graine solide (le *cylindre tangent*), présente un fort gradient à proximité du cylindre tangent, ainsi qu'une singularité pour une latitude de $\pm 35^\circ$. Toutefois, un paramètre de friction à la frontière noyau-manteau dont le signe dépend de la distance à l'axe de rotation a été introduit de façon ad hoc. Pais et Hulot [2000] ont confirmé la présence d'ondes de torsion dans les modèles de champ de vitesse à la surface du noyau déduits des mesures de champ magnétique à la surface de la Terre, tout en soulignant qu'une partie des mouvements géostrophiques observés pourrait ne pas être des ondes de torsion et avoir une dynamique décennale différente, comme certaines ondes de Rossby en présence d'une topographie à la frontière noyau-manteau [Jault, 2003]. Le précédent travail de Zatman et Bloxham a été repris sur une période plus courte (1957-2001) [Bloxham *et al.*, 2002]. Cette fois-ci, trois ondes ont été nécessaires pour représenter correctement la partie du champ de vitesse décrite ci-dessus. Cette étude a établi un lien fort entre les ondes de torsion et les secousses géomagnétiques. La composante Est de la variation séculaire associée à ces trois ondes représente bien les secousses observées en Europe, mais ne prédit rien dans un observatoire de latitude opposée, où aucune secousse n'est observée; un mouvement simple et global dans le noyau cisailant un champ magnétique dynamo dont la morphologie varie géographiquement pourrait donc représenter les secousses.

Toujours dans l'idée de relier les ondes de torsion aux secousses, F. Busse a suggéré que l'arrivée des ondes de torsion à l'équateur ou au cylindre tangent pourrait être la cause de changements soudains du champ magnétique [Jault et Légaut, 2005]. Hide *et al.* [2000], à partir des modèles de champ de vitesse de [Jackson *et al.*, 1993], illustre une propagation de la densité de moment cinétique de l  quateur vers les pôles. Si cette observation est confirmée, elle donnera une idée de la dissipation des ondes de torsion. En effet, léquation d  onde des ondes de torsion est invariante par renversement du temps, si les termes dissipatifs sont négligés.

Les études récentes de Braginsky sur les ondes de torsion portent sur leur évolution dans un noyau stratifié en deux couches [Braginsky, 1993, 1998, 1999]. Dans ces modèles, la topographie de la frontière noyau-manteau excitent des ondes de Rossby dans la couche stratifiée au sommet du noyau, qui à leur tour, excitent des ondes de torsion dans le coeur du noyau. Néanmoins, le mécanisme d'excitation le plus naturellement invoqué est de considérer que la dynamique décennale du noyau s'écarte de l'état de Taylor et y revient en générant des ondes de torsion. Dumberry et Bloxham [2003] considèrent, quant à eux, une excitation à travers le tenseur de Reynolds. Finalement, Duhau et Martinez [1995] proposent un mécanisme qualitatif d'excitation des ondes de torsion. Sur les échelles de temps décennales, le système noyau-manteau est isolé : les variations de longueur du jour sont g  vern  es par l'échange de moment cinétique entre le noyau et le manteau [Jault *et al.*, 1988; Jackson *et al.*, 1993]. Duhau et Martinez [1995] proposent que l'anneau de courant magnétosphérique contrôle l'échange de

moment cinétique : la force de Lorentz – créée par le champ externe et les courants présents dans le noyau – exerce un couple non nul sur les cylindres géostrophiques, créant ainsi des ondes de torsion.

Les mécanismes à l'origine de cet échange de moment cinétique entre le noyau et le manteau sont encore mal compris, et les ondes de torsion, qui transportent le moment cinétique à l'intérieur du noyau, ont été incluses dans des modèles de couplage noyau-manteau. Les études des différents couplages représentent la plupart des travaux sur les ondes de torsion. Buffett [1988] étudie les différents couples possibles – électromagnétiques (manteau-noyau et noyau-graine), topographique et gravitationnel – associés à cette dynamique particulière du noyau. Si le couple électromagnétique à la frontière noyau-manteau explique les variations de longueur du jour, alors la conductance de la base du manteau (10^8 S) est telle que les ondes de torsion sont très atténuées, alors qu'elles le sont moins, si c'est le couple topographique qui explique les variations de longueur du jour. Cependant, la prise en compte du couple topographique associé aux ondes de torsion n'est pas complète [Jault et Légaut, 2005]. Mound [2005] considère le couplage électromagnétique du noyau avec la graine : ce couple ne permet pas d'expliquer les variations décennales du mode de Markowitz. Dans cette étude, la vitesse géostrophique à l'intérieur du cylindre tangent est supposée uniforme, mais différente de celle de la graine.

Toujours dans la suite de ce type d'étude, il a été remarqué que la longueur du jour présentait une variation de période d'environ 6 ans. Or, il n'y a pas de signal correspondant dans le moment cinétique de l'atmosphère et les ondes de torsion seules n'expliquent pas ce signal. Mound et Buffett [2003] ont expliqué ce signal par un mécanisme alliant un couplage gravitationnel manteau-graine – associé à des couples produits par les processus dynamo sur la graine qui perturbent le potentiel gravitationnel de la Terre – et un couplage entre des ondes de torsion et le manteau. Les oscillations de la graine, autour de l'axe de la Terre, entraînent le fer liquide du noyau situé à l'intérieur du cylindre tangent, par couplage électromagnétique. Cette partie du noyau est couplée aux ondes de torsion externes au cylindre tangent par le champ magnétique qui traverse le cylindre tangent. Des ondes de torsion sont ainsi forcées au niveau du cylindre tangent et il s'ensuit un couplage électromagnétique des ondes avec le manteau. Un peu dans la même idée, Dumberry et Bloxham [2004] ont essayé de voir la trace des ondes de torsion dans des oscillations gravitationnelles : dans le noyau, les mouvements géostrophiques sont associés à une pression constante sur la surface des cylindres, qui augmente de l'axe à l'équateur : le gradient de pression déforme la frontière noyau-manteau et la frontière graine-noyau qui font varier le champ de gravité de la Terre. Les effets semblent néanmoins de trop faible amplitude pour être détectés.

Ce présent travail ne se place pas dans la continuité de l'étude des différents couplages graine-noyau-manteau, mais propose plutôt une modélisation directe des ondes de torsion dans le noyau. Une étude du couplage entre les ondes et la graine est ainsi possible, permettant de tester différentes hypothèses utilisées dans les études précédemment citées.

Après une introduction géophysique sur la Terre et son champ magnétique (chapitre 1), les équations gouvernant l'évolution du champ magnétique sont décrites (chapitre 3). Comme la loi d'Ohm fait intervenir le champ de vitesse du fer liquide dans le noyau, les équations d'évolution de la vitesse sont ensuite exposées. Le rôle de la force de Coriolis sur la dynamique du noyau est abordé, puis la contrainte de Taylor – essentielle pour les ondes de torsion – est détaillée. Les différents mouvements possibles dans le noyau sont passés en revue et les ondes

de torsion introduites.

Les propriétés de ces ondes d'Alfvén particulières sont décrites sur un cas cartésien simple (chapitre 4) et leur mécanisme physique détaillé. Différentes manières d'exciter des ondes d'Alfvén dans un milieu fluide conducteur sont étudiées. Finalement, les études numériques et expérimentales de ces ondes sont abordées.

Le chapitre 4.6 est entièrement consacré à la dérivation de l'équation d'onde des ondes de torsion dans le noyau de la Terre. Puis leur propagation dans un noyau avec ou sans graine est détaillée (chapitre 5). Un mécanisme d'excitation de ces ondes est présenté (chapitre 6) via la modulation des systèmes de courants externes par le cycle solaire. Pour cela, différents codes numériques ont été développés. En effet, très peu de codes permettent actuellement de simuler des ondes de torsion dans le noyau de la Terre. Les codes qui simulent les processus dynamo dans le noyau terrestre commencent seulement à atteindre une gamme de paramètres qui leur permet d'observer des ondes de torsion, bien que le noyau soit encore relativement loin d'un état de Taylor [Dumberry et Bloxham, 2003].

La présente étude a permis de creuser un peu plus loin la relation entre les secousses et les ondes de torsion : le cycle apparent des secousses depuis ces quarante dernières années étant très proche de 22 ans, on peut s'interroger sur cette coïncidence. Les anneaux de courant externes modulés par le cycle solaire excitent des ondes de torsion dans le noyau à la même période, et induisent à leur tour un champ magnétique à cette période. Un tel cycle a été recherché dans le champ magnétique et en particulier sur sa composante Est (chapitre 2).

Les notations utilisées sont rappelées dans l'annexe A. Les anneaux de courant, simplement décrits dans le référentiel géomagnétique ont besoin d'être connus dans le référentiel terrestre ; c'est l'objet de l'annexe B. La prise en compte de la conductivité du manteau nécessite l'emploi de fonctions de Bessel sphériques à argument complexe. Ces fonctions sont décrites dans l'annexe C. Finalement, l'annexe D décrit succinctement la représentation toroïdale-poloïdale d'un champ de vecteur à divergence nulle, ainsi que diverses relations utiles dans ce travail.

Je vous souhaite une bonne lecture.

Première partie

Introduction géophysique – Données magnétiques

Chapitre 1

Le champ magnétique terrestre

La description du champ magnétique terrestre demande de connaître la structure interne de la Terre. De plus, les interfaces noyau-manteau et graine-noyau jouent un rôle essentiel pour les ondes de torsion – thème de ce travail, car la présence d’une topographie modifie sensiblement les contours géostrophiques et il apparaît alors un couple de pression [Jault, 2003].

1.1 Vers un modèle de Terre simplifié

1.1.1 Le géoïde terrestre

Le géoïde représente l’équipotentielle du champ de gravité terrestre qui coïncide avec le niveau moyen de la mer. L’ellipsoïde qui s’approche le plus du géoïde est appelé l’*ellipsoïde de référence terrestre* ; il s’écarte au maximum de ± 100 m du géoïde. Il est décrit dans [Moritz, 1980] : son demi-grand axe (rayon équatorial) est de 6378137.0 m et son demi-petit axe (rayon polaire) mesure 6356752.3 m pour un rayon moyen de 6371008.7 m. Son aplatissement est de $1/298.257$: son excentricité est donc très proche de l’unité, c’est presque une sphère. L’étude des ondes de torsion dans un ellipsoïde ou dans une sphère étant très similaire, on se placera dans une sphère de rayon $a = 6400$ km, puisque le formalisme mathématique y est beaucoup plus simple. De plus, la connaissance du rayon de la Terre est une donnée importante lorsque l’on veut prolonger dans le manteau, qu’il soit supposé isolant ou non, les données magnétiques enregistrées en surface. On a ainsi une bonne connaissance du champ magnétique à la frontière noyau-manteau, limite inférieure du manteau.

1.1.2 La frontière noyau-manteau

En étudiant la propagation des ondes sismiques dans la Terre, R. D. Oldham découvre en 1906 le noyau. Les données sismiques s’expliquent bien par la présence d’un *noyau* de rayon 3480 ± 5 km qui réfléchit les ondes sismiques. Des études plus fines découvrent que le noyau transmet les ondes de compression, mais pas les ondes de cisaillement : le caractère fluide du noyau est mis à jour.

La valeur hydrostatique de l'aplatissement de la frontière noyau-manteau est estimée à $1/392$ [Mathews *et al.*, 1991]. En utilisant les séries de nutation VLBI (*very large baseline interferometry*), Mathews *et al.* [2002] ont trouvé que l'ellipticité dépasse sa valeur hydrostatique de 3.8% , ce qui correspond à un excès d'environ 350 m du rayon équatorial. Ceci donne une idée de la hauteur minimum de la topographie qu'il est possible de détecter à la frontière noyau-manteau. Une telle topographie pourrait générer des ondes de Rossby de période décennale [Jault, 2003].

Les études sismiques fournissent, elles aussi, des informations sur la topographie de cette frontière. Les anomalies de vitesse des ondes P et S peuvent être converties en anomalies de densité, lesquelles sont responsables de la convection du manteau. Cette dernière génère une topographie dynamique à la surface de la Terre et à la frontière noyau-manteau. L'écart de cette topographie à un ellipsoïde de référence est de quelques kilomètres [Forte et Peltier, 1991; Defraigne *et al.*, 1996]. Les dernières études sismologiques donnent une amplitude de la topographie de ± 1.5 km [Garcia et Souriau, 2000] ou 3 km [Sze et Van der Hilst, 2003] crête à crête.

Comme l'ellipticité est très proche de l'unité et que la hauteur de la topographie est petite devant la taille caractéristique de l'ellipsoïde de référence, la frontière noyau-manteau sera décrite dans ce travail comme une sphère de rayon 3500 km.

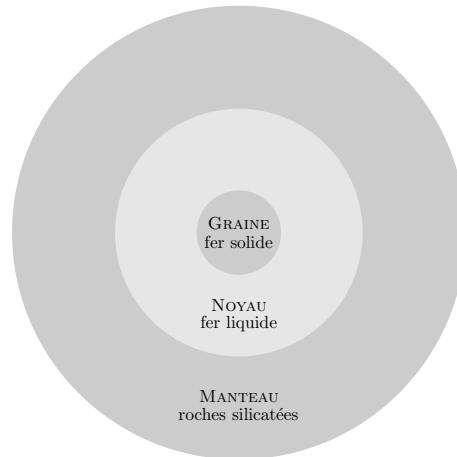


FIG. 1.1: Modèle de Terre simplifié présentant les trois enveloppes que sont la graine ($r = 1221$ km), le noyau ($r = 3480$ km) et le manteau ($r = 6371$ km), ainsi que leur principale composition. Les trois coquilles sont à l'échelle.

1.1.3 La frontière graine-noyau

Toujours en étudiant la propagation des ondes sismiques dans la Terre, Lehman annonce, en 1936, l'existence d'une partie centrale dans le noyau : la *graine*. Il faudra attendre les années 60 pour apprendre qu'elle est principalement composée de fer solide. On la supposera dans cette étude comme sphérique avec un rayon de 1221 km. Elle grossit au fur et à mesure que la Terre refroidit par cristallisation du fer liquide contenu dans le noyau. Son rayon croît à une vitesse de l'ordre de 10^{-11} m.s⁻¹ [Lister et Buffett, 1995].

Dans ce travail, la présence d'une topographie à la frontière noyau-manteau ou à la frontière graine-noyau n'a pas été prise en compte. Les différentes enveloppes ont été considérées sphériques, sans topographie. Je continue maintenant avec une description du champ magnétique terrestre.

Le champ magnétique apparaît dans des écrits chinois datant de 1088, bien que ce n'est qu'au VII^{ème} siècle qu'on a la preuve que les marins chinois naviguaient à la boussole. Cette dernière n'est apparue en Europe qu'au XVI^{ème} siècle. Les premières mesures du champ magnétique porte sur la déclinaison en 1576. Des mesures sur la déclinaison sont effectuées à Londres en 1580, puis renouvelées en 1622 : c'est la découverte des variations temporelles de déclinaison par H. Gellibrand. Depuis, de nombreuses études ont été menées, facilitées maintenant par l'amélioration spectaculaire de la description du champ grâce aux mesures depuis des satellites.

Le champ magnétique à la surface de la Terre peut être vu comme la somme de deux contributions : l'une d'origine externe, en majeure partie liée au soleil ; l'autre d'origine interne à la Terre. Il est de l'ordre de 30 μT à l'équateur et de l'ordre de 60 μT aux pôles.

Avant d'aborder ces deux sources, le moyen mathématique de séparer ces deux sources est détaillé.

1.2 Développement en harmoniques sphériques

Cette méthode a été développée en 1838 par C. F. Gauss. Dans une région isolante, comme la base atmosphère, le champ magnétique vectoriel est entièrement décrit par un champ scalaire potentiel Ψ , dit potentiel magnétique

$$\vec{B} = -\text{grad } \psi \quad (1.1)$$

qui peut être représenté comme une combinaison linéaire d'harmoniques sphériques

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi) = a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left[\left[g_l^m \cos(m\phi) + h_l^m \sin(m\phi) \right] \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right. \\ \left. + \left[q_l^m \cos(m\phi) + s_l^m \sin(m\phi) \right] \left(\frac{r}{a} \right)^l \right] P_l^m(\cos \theta) \end{aligned} \quad (1.2)$$

où P_l^m est une fonction associée de Legendre de degré l et d'ordre m , normalisée d'après la convention géophysique. Les coefficients (g_l^m, h_l^m) décrivent la partie du champ interne à la sphère de rayon a , tandis que les coefficients (q_l^m, s_l^m) décrivent la partie externe. Ils ont la dimension d'un champ magnétique. La valeur des coefficients h_l^0 et s_l^0 n'ayant pas de signification, ils sont choisis nuls.

A partir des données magnétiques enregistrées à la surface de la Terre, on peut connaître les coefficients (g_l^m, h_l^m) à la surface de la Terre (en $r = a$). Si le manteau est supposé isolant, (1.2) permet de prolonger le champ magnétique jusqu'à la surface du noyau (en $r = c$).

1.3 Le champ magnétique d'origine externe

Le vent solaire, chargé en particules chargées, est continuellement émis par le soleil. Ce vent confine le champ magnétique terrestre à l'intérieur d'une cavité qui s'étend sur environ $12 a$ (rayon terrestre) du centre de la Terre vers le soleil. Dans la direction opposée, cette cavité s'étend sur plus de $1000 a$ – au delà de l'orbite de la Lune – pour une largeur de $30 a$ dans la direction perpendiculaire. Les dimensions sont principalement fixées par l'équilibre de pression entre le vent solaire et le champ magnétique terrestre.

La surface de cette cavité est appelée magnétopause : elle joue le rôle de déflecteur pour une partie des particules ionisés arrivant du soleil ; c'est une nappe de courant engendrant une discontinuité de l'ordre de 50 nT dans l'amplitude du champ magnétique. A l'extérieur de la magnétopause, le champ magnétique est quasiment nul. Le champ magnétique créé par la magnétopause annulant ainsi le champ magnétique terrestre, est uniforme à la surface de la Terre, contribuant au coefficient q_1^0 .

Le champ magnétique d'origine externe représente environ 10% du champ terrestre à l'équateur [Backus *et al.*, 1996]. Les tempêtes magnétiques provoquent une variation de l'amplitude de quelques dizaines de nT pendant quelques minutes. Cependant, aux hautes latitudes, des tempêtes de plus de 2000 nT ont été enregistrées pendant plusieurs dizaines d'heures.

Le champ magnétique d'origine externe est donc lié à l'activité solaire. Il y a un transfert d'énergie entre le vent solaire et la magnétopause, et l'ionisation d'une partie de l'ionosphère sous le rayonnement solaire. Les particules ionisées résultant de ces processus créent les différents systèmes de courant. Je commence par une description de l'anneau de courant magnétosphérique avant de décrire les systèmes de courant ionosphériques.

1.3.1 L'anneau de courant magnétosphérique

Dans le plan de l'équateur magnétique, entre trois et six rayons terrestres, deux phénomènes se superposent. Premièrement, les particules les plus énergétiques arrivant dans cette région sont piégées par le champ magnétique : elles se déplacent alors le long des lignes de champ magnétique, sensibles au gradient de ce champ qui tend à les ramener vers l'équateur : c'est l'effet de miroir magnétique. Les particules sont finalement absorbées par l'atmosphère terrestre. Le rayonnement dû à ce mouvement de va et vient a donné à cette zone le nom de *couche de radiation externe*, découverte en 1959 par J. A. Van Allen. Deuxièmement, les particules les moins énergétiques produisent un courant, d'une part sous l'effet du gradient de champ magnétique, et d'autre part sous l'influence de la force de gravité qui agit différemment suivant que la particule est un électron (faible masse) ou un ion (beaucoup plus lourd qu'un électron). Dans cette configuration, les ions dérivent alors vers l'ouest et les électrons vers l'est : c'est *l'anneau de courant magnétosphérique*. La valeur typique de la densité de courant est de 10^{-8} A.m^{-2} et le champ magnétique généré par ces phénomènes s'oppose au champ magnétique terrestre [Lilensten et Blelly, 1999]. Par la suite, cet anneau de courant magnétosphérique sera simplement appelé anneau de courant.

En première approximation, les variations du champ magnétique, à la surface de la Terre,

pour des périodes comprises entre deux jours et un an, sont associées à des sources externes, et en particulier à l'anneau de courant [Banks, 1969, et les références citées dedans].

On peut développer le champ créé par cet anneau en harmoniques sphériques sur les termes zonaux de degré impair, au moins en première approximation. A cause du rapport géométrique des rayons dans le développement, Banks [1969] a fait remarquer que le premier terme était déjà une très bonne approximation, au moins aux faibles latitudes [Fujii et Schultz, 2002]. On pourra aussi consulter cette dernière référence pour remarquer que le terme en P_1^0 est une bonne approximation du champ créé par l'anneau de courant aux hautes fréquences (en particulier leur Fig. 9).

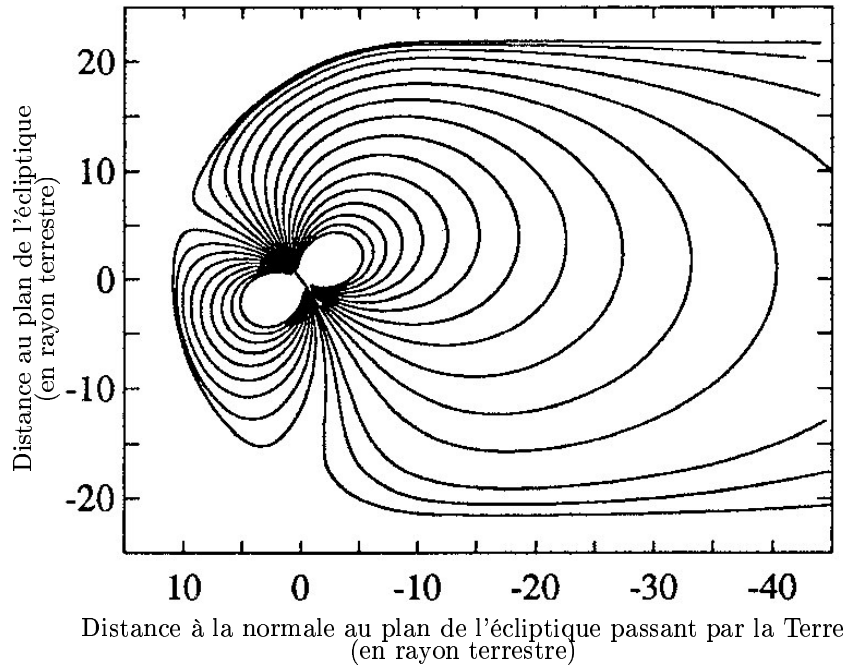


FIG. 1.2: Lignes de champ magnétique dans le plan méridien midi-minuit de l'anneau de courant [Hilmer et Voigt, 1995].

L'anneau de courant est principalement constitué d'électrons et d'ions positifs tels que H^+ , O^+ , He^+ et He^{++} [Daglis *et al.*, 1999]. On trouvera dans [Grande *et al.*, 1997] les importances relatives de ces différentes particules lors de tempêtes magnétiques ou par temps calme. Ces particules proviennent, soit du vent solaire, soit de l'ionosphère et génèrent des densités de courant moyenne de 1 à 4 $nA.m^{-2}$ par temps calme à 7 $nA.m^{-2}$ lors de tempêtes magnétiques [Daglis *et al.*, 1999].

Comme on peut le voir sur la figure 1.3, l'anneau de courant est composé de deux anneaux : le plus interne, dont les particules vont vers l'est, est situé à une distance d'environ $3 R_E$ (R_E pour rayon terrestre). Le plus important, vers l'ouest, s'étale entre 4 et 7 R_E [Le *et al.*, 2004].

De plus, cet anneau a une partie symétrique et une partie non-symétrique, laquelle est située côté nuit, centrée sur minuit (heure locale). Par temps calme, l'anneau symétrique et l'anneau partiel ont une intensité équivalente de l'ordre de 500 000 A. Lors d'une tempête magnétique, l'intensité de l'anneau symétrique monte à 10^6 A., et celle de l'anneau partiel à 3.10^6 A. Ces

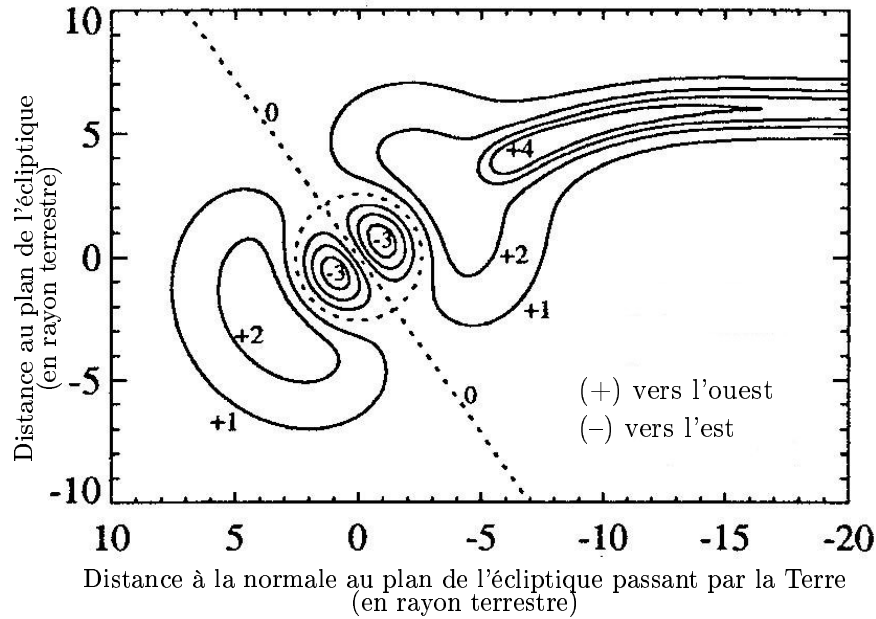


FIG. 1.3: Contours de densité de courant (nA.m^{-2}). L'anneau de courant de la figure 1.2 a été combiné avec un courant de traversée de queue [Hilmer et Voigt, 1995].

anneaux créent à la surface de la Terre un champ magnétique uniforme moyen aux grandes périodes de l'ordre de 20 nT qui tend à diminuer le champ magnétique présent à la surface de la Terre [Le *et al.*, 2004].

On peut avoir une idée de l'intensité de la partie globalement symétrique de l'anneau de courant grâce à l'indice Dst (*disturbance storm time*), lequel est construit à partir des données des observatoires de faibles latitudes : HON (Honolulu), HER (Hermanus), KAK (Kakioka) et SJG (San Juan) [Constable et Constable, 2004]. C'est un indice de l'activité magnétique utilisé pour estimer l'amplitude des tempêtes magnétiques. Il est basé sur une moyenne des valeurs horaires de la composante horizontale dans les quatre stations. La composante horizontale du champ magnétique à l'équateur est inversement proportionnelle à la densité d'énergie de l'anneau de courant magnétosphérique : c'est la relation de Dessler-Parker-Sckpope. Cependant, cet indice prend aussi en compte d'autres courants magnétosphériques comme le courant de traversée de queue [Daglis *et al.*, 1999].

1.3.2 Les systèmes de courant ionosphériques

Aux moyennes et basses latitudes, les particules sont ionisées par des processus associés au chauffage solaire ou aux effets de marée. Le champ magnétique d'origine interne défléchit ces particules de leur trajectoire avant ionisation pour créer les courants ionosphériques.

Ces courants consistent en partie en boucle de courant, centrées sur la direction Terre-soleil – à $\pm 30^\circ$ de latitude géomagnétique aux équinoxes (voir Fig. 1.6). Ces courants varient donc sur la journée : c'est la variation quotidienne. Elle est notée S_q lorsqu'il n'y a pas de tempêtes magnétiques.

Outre ces courants, il y a un effet d'anisotropie de la conductivité à l'équateur magnétique qui donne naissance à l'électrojet équatorial.

1.3.3 L'électrojet équatorial

Lors de l'installation de la station magnétique HUA (Huancayo) au Pérou, il a été remarqué que le champ magnétique était anormalement élevé. C'est en 1947 que Egedal interprète le premier correctement ces variations magnétiques par un anneau de courant qui sera baptisé *électrojet équatorial* par Chapman en 1951. Puis Gouin et Mayaud remarquent en 1967 que l'électrojet équatorial s'inverse pendant quelques heures, c'est la découverte du contre-électrojet qui suit l'électrojet équatorial [Forbes, 1981].

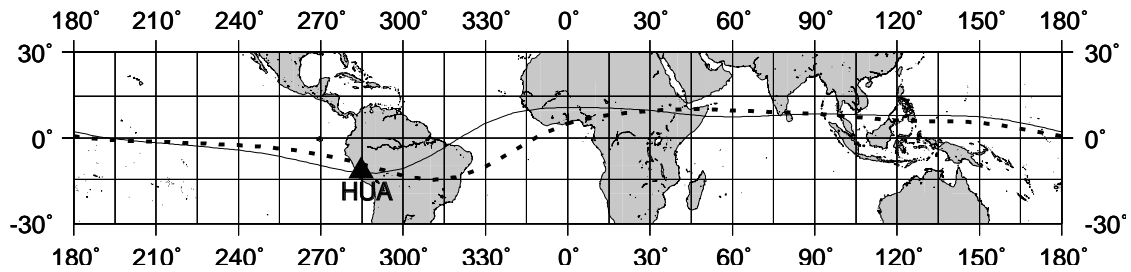


FIG. 1.4: Equateur magnétique obtenu à partir du modèle *gufm1* 1890 (pointillé) et en 1990 (trait plein), avec la station magnétique où fut découvert l'électrojet équatorial. Aux Amériques, l'équateur magnétique remonte vers le nord à la vitesse de 1 degré tous les dix ans [Jadhav *et al.*, 2002].

Une partie de la conductivité électrique dans l'ionosphère s'exprime en fonction des différentes composantes du champ magnétique (conductivité de Hall). A cause d'une forte anisotropie de la conductivité au niveau de l'équateur magnétique, la densité de courant \vec{j} n'est plus linéairement reliée au champ électrique \vec{E} . Intervient le tenseur de conductivité $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la loi d'Ohm

$$\vec{j} = \underline{\underline{\sigma}} \vec{E} \quad (1.3)$$

A partir de la géométrie du champ magnétique à l'équateur magnétique, on définit plusieurs directions : la direction parallèle au champ (globalement nord-sud), la direction perpendiculaire P (globalement est-ouest) et enfin, on complète le trièdre par la direction H (globalement verticale).

Le courant dans la direction P est appelé *courant de Pedersen*, et on note σ_P la conductivité de Pedersen, laquelle dépend des fréquences de collision des particules présentes [Jadhav *et al.*, 2002]. Dans la direction orthogonale aux champs magnétique et électrique, le courant est appelé *courant de Hall* et sa conductivité est notée σ_H . Cette dernière est inversement proportionnelle au champ magnétique horizontal.

La relation (1.3) s'écrit en fonction des différentes conductivités [Lilensten et Blelly, 1999]

$$\begin{aligned} j_{//} &= \sigma_{//} E_{//} \\ j_P &= \sigma_P E_P - \sigma_H E_H \\ j_H &= \sigma_P E_H + \sigma_H E_P \end{aligned}$$

Comme l'ionosphère peut être considérée stratifiée horizontalement, les courants verticaux peuvent être négligés ($j_H \sim 0$), ce qui permet d'écrire les courants sur la composante P

$$j_P = \left(\sigma_P + \frac{\sigma_H^2}{\sigma_P} \right) E_P = \sigma_c E_P$$

où σ_c est appelé la conductivité de Cowling. A l'équateur, la conductivité de Hall possède un pic large autour de 130 km, avec une valeur maximale typique de l'ordre de $4.10^{-4} \text{ S.m}^{-1}$. Vers 150 km, comme vers 90 km, elle tend vers zéro. La conductivité de Pedersen possède pour sa part un pic étroit vers 150 km d'amplitude typique $3.10^{-4} \text{ S.m}^{-1}$ et tend vers zéro vers 220 km comme vers 100 km. La conductivité de Cowling qui en résulte possède un pic étroit vers 100 km où elle est de l'ordre de $8.10^{-3} \text{ S.m}^{-1}$. En dessous du pic, elle tend vers zéro en une quinzaine de kilomètres, tandis qu'au dessus, elle décroît lentement jusque vers 160 km d'altitude. Horizontalement, le champ électrique équatorial E_P est de l'ordre de 0.5 mV.m^{-1} [Lilensten et Blelly, 1999; Richmond, 1995]. Ce champ horizontal engendre un courant vertical ($\sigma_H E_P$). Comme $j_H \sim 0$, il apparaît un champ de polarisation vertical E_H d'autant plus fort que σ_H est grande devant σ_P . A son tour, ce champ vertical participe fortement aux courants est-ouest ($-\sigma_H E_H$) pour produire une grande partie de l'électrojet équatorial. Le champ électrique E_H est de l'ordre de $2\text{-}4 \text{ mV.m}^{-1}$ [Richmond, 1995]. La Fig. 1.5 montre la densité de courant de l'électrojet.

L'électrojet équatorial se déplace le long de l'équateur magnétique (le champ magnétique est alors horizontal) [Jadhav *et al.*, 2002; Lühr *et al.*, 2004]. Comme une partie de la conductivité est liée à l'ensoleillement de l'ionosphère, il est maximum à midi et se dissipe le soir [Ivers *et al.*, 2003].

L'électrojet a une faible extension en latitude de ± 4 degrés de part et d'autre de l'équateur magnétique [Lühr *et al.*, 2004]. Différentes modélisations ont été développées pour rendre compte du champ magnétique observé [Boteler *et al.*, 2000; Doumouya *et al.*, 2003] et améliorer la représentation par une simple boucle de courant.

Au niveau des pôles magnétiques se développent encore d'autres systèmes de courants et en particulier les anneaux auroraux.

1.3.4 Les anneaux auroraux conjugués

Autour des pôles magnétiques se développent les aurores boréales et australes (cf les Fig. 1.7, 1.8 et 1.10). Associés à ces phénomènes, se développent deux systèmes de courants complexes conjugués (l'un dans l'hémisphère Nord et l'autre dans l'hémisphère Sud, cf Fig 1.7). Par

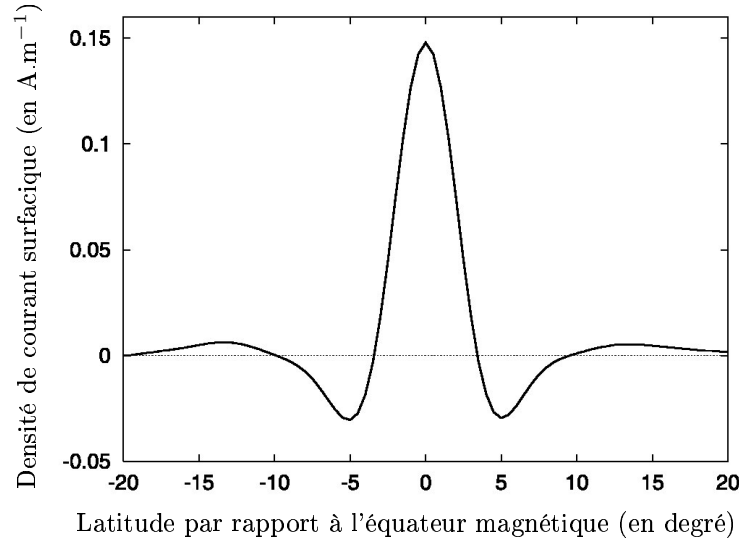


FIG. 1.5: Densité de courant surfacique (A.m^{-1}) en fonction de la latitude par rapport à l'équateur magnétique [Lühr *et al.*, 2004]. La partie centrale est un courant allant vers l'est trois fois supérieur aux courants de retour. La densité moyenne des courants est fortement corrélée à la moyenne mensuelle de l'index du flux solaire F10.7 [Lühr *et al.*, 2004].

exemple, l'ovale auroral (un autre synonyme pour décrire ce système de courant) de l'hémisphère nord se situe en moyenne autour de 67 degrés de latitude [Fujii et Schultz, 2002] au dessus du Canada (cf Fig. 1.9).

Maintenant, en réalité, l'ovale auroral nord est composé de deux électrojets auroraux de sens contraire (cf Fig. 1.6) qui sont des courants est-ouest, principalement dus à un effet Hall. Les processus physiques à la base des électrojets auroraux est et ouest ne semblent pas être les mêmes, ces différences se reflétant dans les indices auroraux AU et AL respectivement [Ahn *et al.*, 2000].

Une valeur typique de l'intensité de ces anneaux est de 10^6 A. [Daglis *et al.*, 1999]. Bien que cela ne soit pas détaillé dans la référence donnée, je pense qu'il s'agit ici d'une valeur typique de l'intensité lorsque l'activité solaire est moyenne voire forte.

1.3.5 Couplage des différents systèmes de courant

Ces systèmes de courant ne sont pas indépendants les uns des autres : ils bouclent souvent l'un dans l'autre ... ainsi, les systèmes de courant à haute latitude sont corrélés avec le système équatorial [Boteler *et al.*, 2000; Fujii et Schultz, 2002] et la magnétosphère, en particulier au travers des courants alignés (cf Fig. 1.11). Ces derniers, lors d'une activité solaire soutenue, ont une intensité de l'ordre de 10^6 A. et tendent à diminuer le champ magnétique dans les régions polaires de 10 nT par temps calme sur des périodes de l'ordre du jour [Antonova et Ganushkina, 2000].

Voilà qui termine cette description de la partie d'origine externe du champ magnétique terrestre. Pour plus de détails, on pourra consulter l'article de review [Courillot et Mouël, 1988].

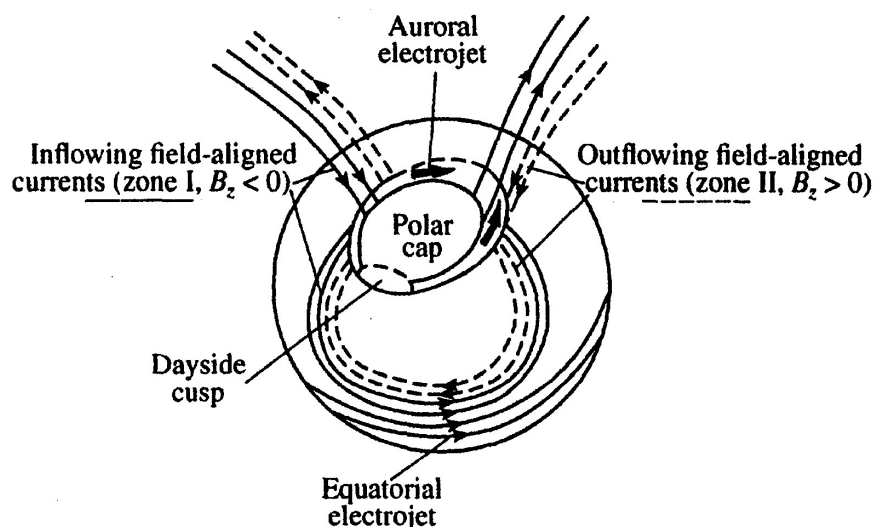


FIG. 1.6: Schéma de l'interaction des anneaux de courant auroraux avec les autres systèmes de courants [Sizova, 2002]. B_z est la composante verticale du champ magnétique interplanétaire.

1.4 Le champ magnétique d'origine interne

Il y a deux contributions au champ magnétique d'origine interne : la première concerne le manteau. Dans le manteau légèrement conducteur sont induits des courants en réponse aux variations externes du champ magnétique terrestre. La seconde concerne le noyau, siège du processus dynamo : c'est la contribution majeure au champ magnétique.

1.4.1 La convection dans le noyau et la dynamo

Le flux de chaleur perdu par le noyau au niveau de la frontière noyau-manteau est de l'ordre de 10^{12} W [Buffett *et al.*, 1996; Glatzmaier et Roberts, 1996; Lister et Buffett, 1995]. Pour une telle valeur du flux de chaleur, le noyau est dans un état convectif plutôt que diffusif. Cette convection peut être thermique (lors de la cristallisation de la graine, de la chaleur latente est libérée à la base du noyau) ou solutale (l'alliage de fer qui cristallise à la surface de la graine est plus pauvre en éléments légers que le noyau liquide : la base du noyau est ainsi enrichie en éléments légers) [Buffett *et al.*, 1996; Glatzmaier et Roberts, 1996; Lister et Buffett, 1995; Labrosse, 2003, ...]. Parmi ces éléments légers, il pourrait se trouver des éléments radioactifs tel que le potassium 40 qui peuvent participer au chauffage du noyau par désintégration radioactive [par exemple, Labrosse, 2003].

Les mouvements générés par la convection sont aujourd'hui beaucoup étudiés parce qu'ils pourraient donner lieu au processus dynamo qui entretient le champ magnétique terrestre. Cela a donné la première dynamo numérique [Glatzmaier et Roberts, 1995], avant les deux expériences qui mirent en évidence l'effet dynamo à Riga [Gailitis *et al.*, 2000] en Lettonie et à Karlsruhe [Stieglitz et Müller, 2001] en Allemagne. On trouvera une revue des dynamos

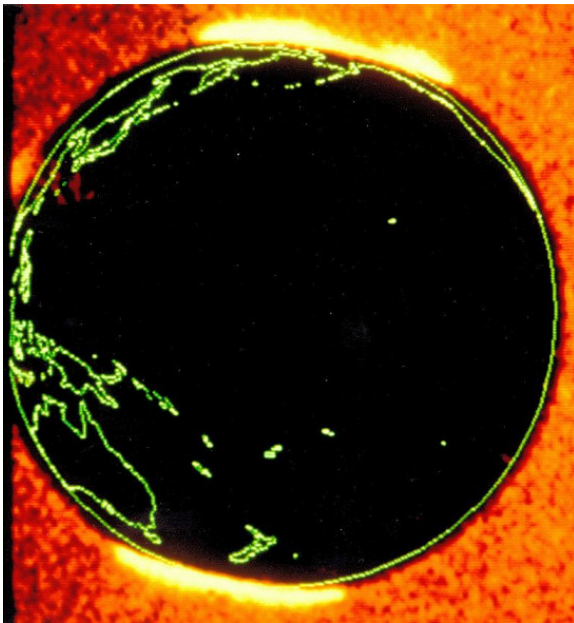


FIG. 1.7: Vue des anneaux auroraux conjugués.



FIG. 1.8: Vues des anneaux auroraux de Jupiter, prouvant qu'il y a un champ magnétique sur cette planète.

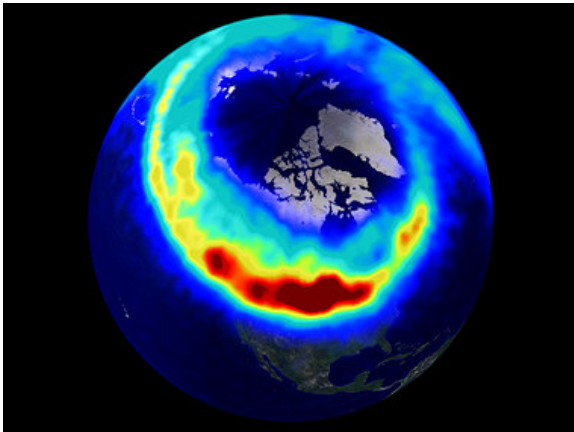


FIG. 1.9: L'oval auroral est situé au dessus du Canada.

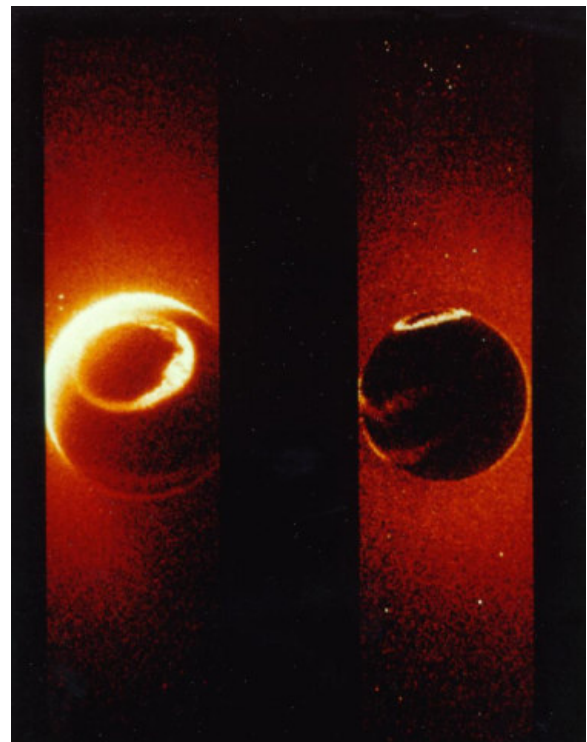


FIG. 1.10: Différentes vues de l'oval auroral.

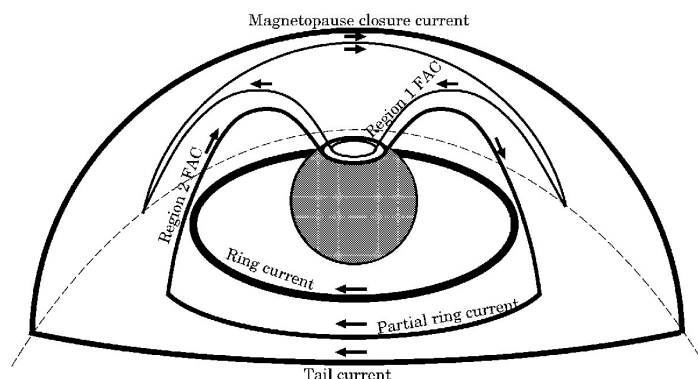


FIG. 1.11: Schéma des différents systèmes de courants, montrant en particulier le couplage entre le système de courant auroral et l'anneau de courant [Alexeev, 2001].

numériques dans [Dormy *et al.*, 2000] et expérimentales dans [Nataf, 2003]. Parmi les dernières études parues, on peut citer [Schaeffer, 2004; Schaeffer et Cardin, 2005] qui utilisent pleinement les approximations qui seront présentées dans ce travail à propos de la bidimensionnalisation de l'écoulement quand la force de Coriolis est l'une des forces prédominantes du système.

L'importance relative de la convection thermique par rapport à la convection solutale dans leur contribution au processus dynamo dépend de l'âge de la graine. La convection solutale a commencé avec la formation de la graine et a pris de plus en plus d'importance au fur et à mesure que la graine grossissait. Les estimations actuelles la donnent légèrement prédominante sur la convection thermique [Lister et Buffett, 1995; Labrosse, 2003].

C'est du noyau que provient la contribution la plus importante au champ magnétique enregistré à la surface de la Terre. La lente variation originaire du champ est appelée variation séculaire. Sur des échelles de temps de l'ordre de la centaine d'années, on peut observer la dérive vers l'ouest de la partie non dipôle du champ magnétique [Jault *et al.*, 1988]. Quand à la partie dipolaire qui représente environ 80% du champ, elle a un moment dipolaire de 8.10^{22} A.m² qui décroît d'environ 5% en un siècle. Sur des échelles de temps géologiques (quelques millions d'années), on observe dans les laves que le dipôle s'est inversé un grand nombre de fois. Des modélisations numériques retrouvent ces inversions, même si les paramètres terrestres ne sont pas atteints [Glatzmaier et Roberts, 1996; Schaeffer et Cardin, 2005; Takahashi *et al.*, 2005].

1.4.2 Les jerks

La (re)découverte des jerks en 1978

Il avait été observé dans les années 1950 qu'une composante du champ magnétique pouvait être représentée par une série de segments de droite (cf Fig. 1.12), ces segments de droite se coupant au moment de *sauts* du champ magnétique. L'amplitude des sauts étaient alors

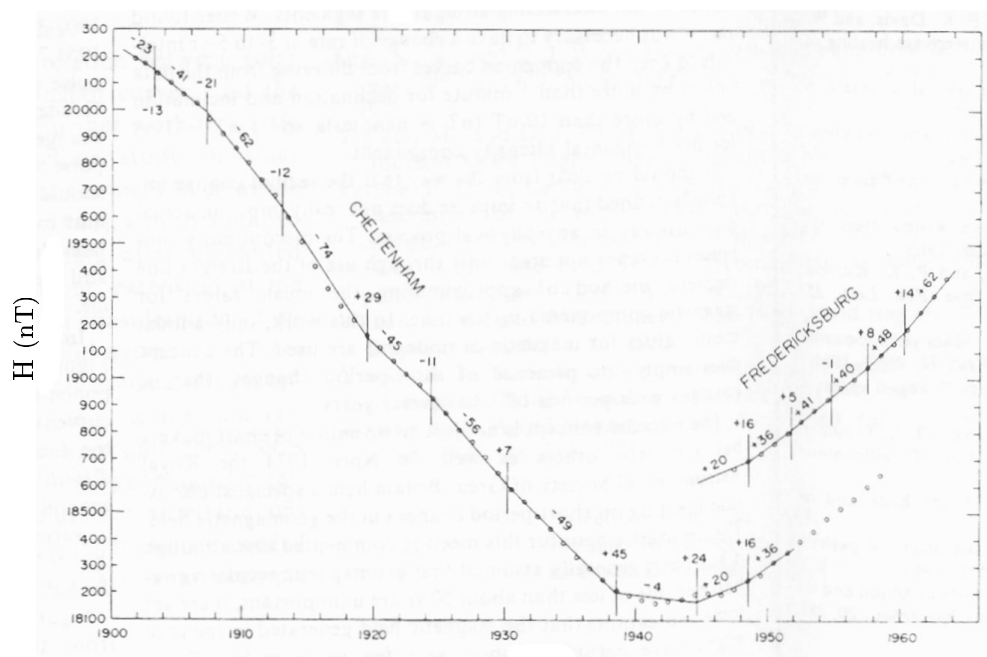


FIG. 1.12: Composante horizontale du champ magnétique (nT) en fonction du temps (années) dans les observatoires de Cheltenham et Fredericksburg. Les nombres au-dessus des barres verticales donnent l'amplitude du saut de la variation séculaire en nT/an, tandis que les autres nombres donnent la valeur de la pente supposée constante entre deux sauts, toujours en nT/an [Allredge, 1975].

caractérisés par la différence des pentes avant et après un saut [Weber et Roberts, 1951]. De tels sauts avaient été détectés en 1903.2, 1907.3, 1913.0, 1919.5, 1924.4, 1930.2, 1938.5, 1944.6, 1948.5, 1951.7, 1954.8, 1957.5 et 1960.3 et étaient corrélés à l'activité solaire [Allredge, 1975], malgré quelques dates biaisées par une représentation discrète des courbes [Courtillot et Le Mouél, 1976].

En remarquant un brusque changement dans la composante Y de la variation séculaire du champ magnétique dans les observatoires européens vers 1969-1970, d'un ordre de grandeur supérieur aux sauts précédents, Courtillot *et al.* [1978] ont lancé l'étude des *jerks*. Ce coup-ci, ce n'est plus le champ lui-même, mais sa variation séculaire qui est modélisée comme une succession de segments de droite.

Beaucoup de personnes s'étant intéressées aux jerks, je ne citerai pas toutes les références, mais le lecteur en trouvera en particulier dans [Alexandrescu *et al.*, 1996, 1999; Nagao *et al.*, 2002].

Les données magnétiques de variation séculaire sur la composante Y en Europe (cf Fig. 1.15) présentent en effet l'impression indéniable d'être une succession de segments de droite. Les figures 1.14, 1.15 et 1.16 ont été obtenues à partir des données mensuelles disponibles sur le site web de l'IPGP (<http://obsmag.ipgp.jussieu.fr>). La dérivation temporelle est obtenue par différence centrée, les données sont lissées par moyenne sur une fenêtre glissante de largeur 12 mois et centrée sur la date actuelle (les six premières et dernières valeurs ont été éliminées).

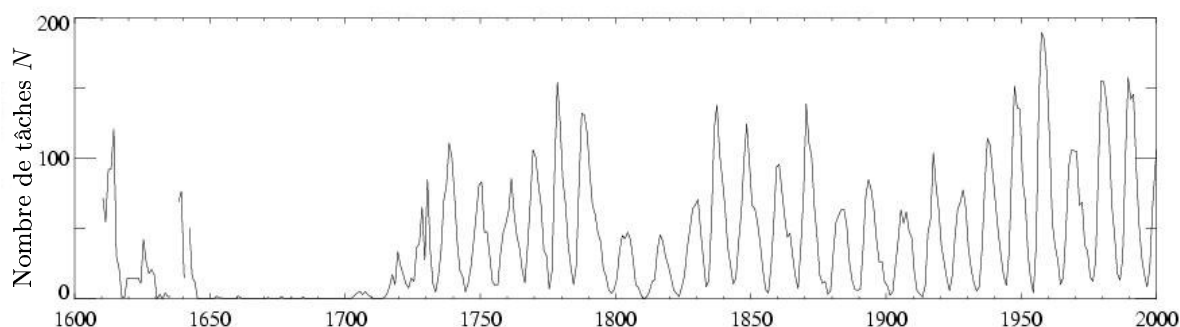


FIG. 1.13: Moyenne annuelle du nombre de tâches solaires N , avec le minimum de Maunder sous le règne du roi soleil.

Origine interne vs origine externe

Dès le début, Courtillot *et al.* [1978] puis Malin et Hodder [1982] ont penché pour une origine interne des jerks. Par contre, pour Alldredge [1984, 1985], un système de courants externes pouvait générer les jerks observés. Pour statuer sur l'origine des secousses magnétiques, Gavoret *et al.* [1986] ont essayé d'éliminer le champ externe (combinaison linéaire du nombre de Wolf (cf Fig. 1.13) et de l'indice aa) des données, aux grandes périodes, pour voir si les secousses étaient toujours dans la partie interne du champ. Cependant, les résidus contiennent toujours la trace d'un cycle à 11 ans qui sort des barres d'erreurs du bruit observationnel des données. Par une autre méthode, Gubbins et Tomlison [1986] arrivent à la même conclusion. Il semble donc qu'une partie seulement du signal magnétique à 11 ans soit corrélée à l'activité solaire. D'où pourrait venir une composante du cycle à 11 ans non corrélée à l'activité solaire ? Malgré cela, comme le signal à 11 ans non corrélé avec l'activité solaire n'est qu'une portion relativement faible du signal global à 11 ans, ils penchent pour une origine interne des jerks.

Dates d'occurrence

Dans le même temps, d'autres jerks ont été recherchés : la date de 1978 a été proposée entre autre par [Gavoret *et al.*, 1986; Gubbins et Tomlison, 1986], ainsi que les dates de 1913, 1935, 1937, 1947, 1958 et 1983. On peut remarquer que la date de 1913 était déjà citée par [Alldredge, 1975] (cf Fig. 1.12). Différentes méthodes ont ensuite été utilisées pour déterminer rigoureusement les dates d'occurrence des jerks : Alexandrescu *et al.* [1995, 1996] utilisent une analyse en ondelettes pour examiner une combinaison linéaire des composantes horizontales et ne déterminent plus que sept événements avant 1996, le jerk de 1991 étant à la limite de détection par cette méthode au moment de l'étude : 1901, 1913, 1925, 1932, 1949, 1969 et 1978. Les deux derniers sont incontestablement d'extension globale (les jerks sont détectés dans tous les observatoires), les trois premiers semblent l'être aussi (par exemple, seulement trois séries, celles de Coimbra, Niemegk et Chambon-La-Forêt, sont suffisamment longues pour contenir le jerk de 1901), tandis que les autres n'ont qu'une extension locale. Deux autres jerks ont été détectés depuis en 1991 et 1999 [Macmillan, 1996; Manda *et al.*, 2000; Chambodut et Manda, 2005], le premier étant d'extension globale [Michelis *et al.*, 1998].

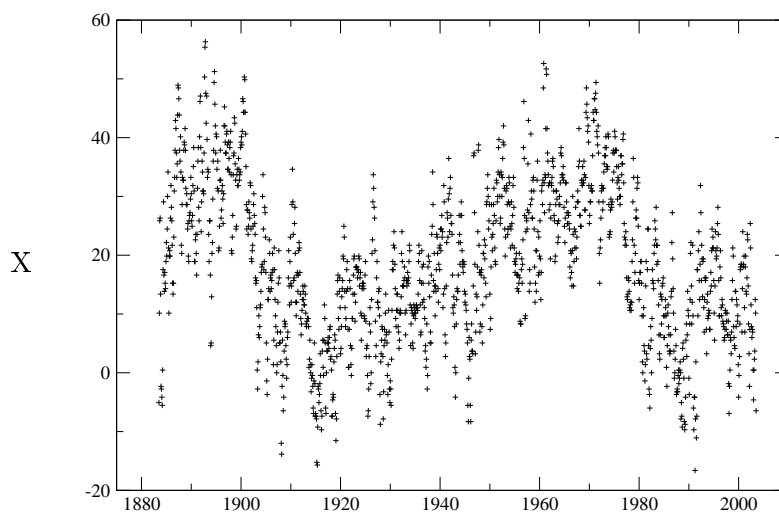


FIG. 1.14: Composante X (nT/an) de la variation séculaire à Chambon-La-Forêt

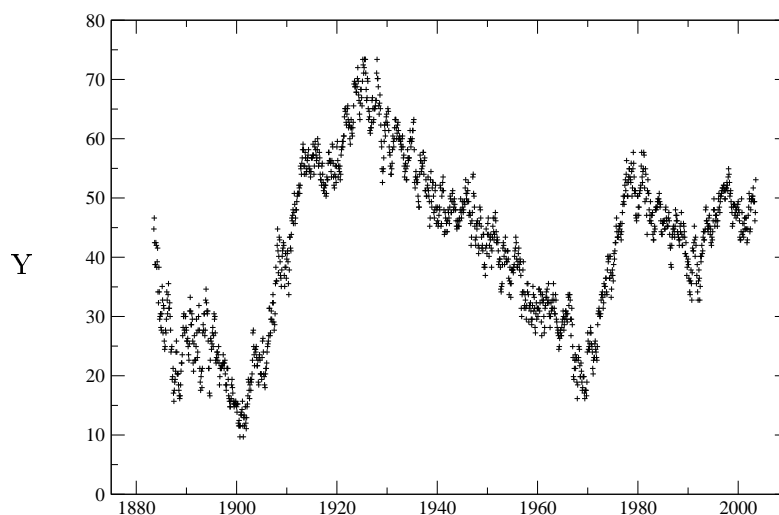


FIG. 1.15: Composante Y (nT/an) de la variation séculaire à Chambon-La-Forêt

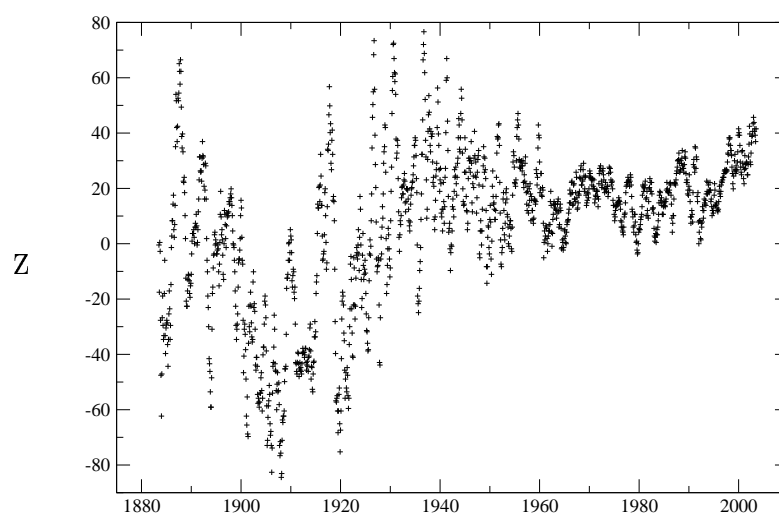


FIG. 1.16: Composante Z (nT/an) de la variation séculaire à Chambon-La-Forêt

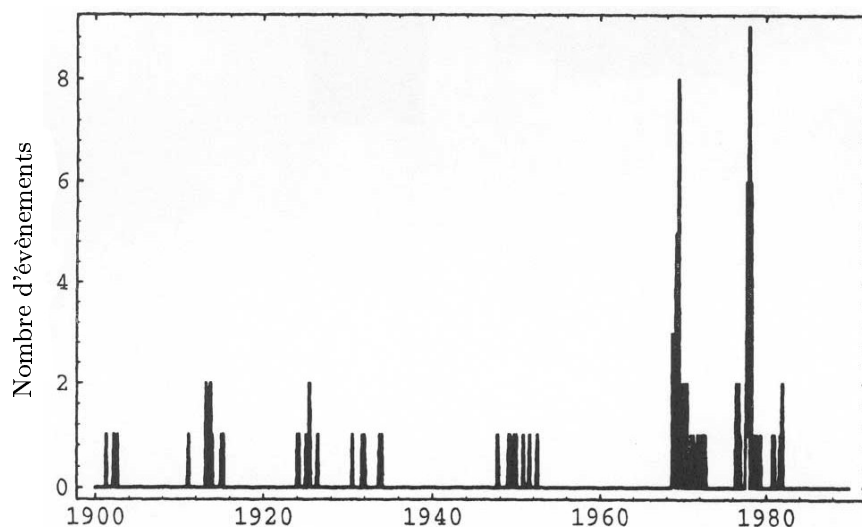


FIG. 1.17: Histogramme des dates des jerks détectés [Alexandrescu *et al.*, 1996]. Sept groupes peuvent être identifiés aux alentours de 1901, 1913, 1925, 1932, 1949, 1969 et 1978.

En abordant le problème du point de vue de la théorie de l'information (les éléments du modèle, c'est à dire la date d'occurrence des jerks et leur nombre sur la période considérée (1960-2000) sont déterminés par le critère d'information d'Akaike (AIC) [Akaike, 1973]), Nagao *et al.* [2002] retrouvent les mêmes dates entre 1960 et 2000, avec une date vers le début des années 1960 vraisemblablement due à une série temporelle trop courte. Ils étudient la possibilité que des courants longitudinaux, tel que l'anneau de courant magnétosphérique, expliquent les jerks. Pour cela, ils estiment les variations d'intensité de cet anneau à partir de la composante Y de la variation séculaire en supposant qu'un changement rapide de l'intensité de l'anneau génère un jerk. Cependant, ces estimations ne sont pas cohérentes avec la trace des jerks sur les composantes X et Z. Ils concluent sur une vraisemblable origine interne des jerks.

Le travail de [Backus, 1983] a, entre autre, apporté une meilleure compréhension d'une caractéristique des jerks : la date d'occurrence. En effet, il semble que le même jerk ne soit pas détecté en même temps en différentes stations magnétiques (cf Fig. 1.17). On peut en trouver une illustration sur les jerks synthétiques ayant servis à tester l'analyse en ondelettes de Alexandrescu *et al.* [1996]. Backus a considéré un jerk idéal (pulse dans la dérivée troisième du champ magnétique) ayant lieu à la frontière noyau-manteau et il détermine ce qui arrive à la surface de la Terre en supposant un manteau conducteur : il conclut que la date d'émergence du jerk peut être différente à différents endroits à la surface de la Terre, et ce, même dans le cas d'un jerk idéal. Il semble que les jerks ayant lieu dans l'hémisphère nord précèdent d'environ deux ans ceux qui ont lieu dans l'hémisphère sud [Alexandrescu *et al.*, 1996; Nagao *et al.*, 2002].

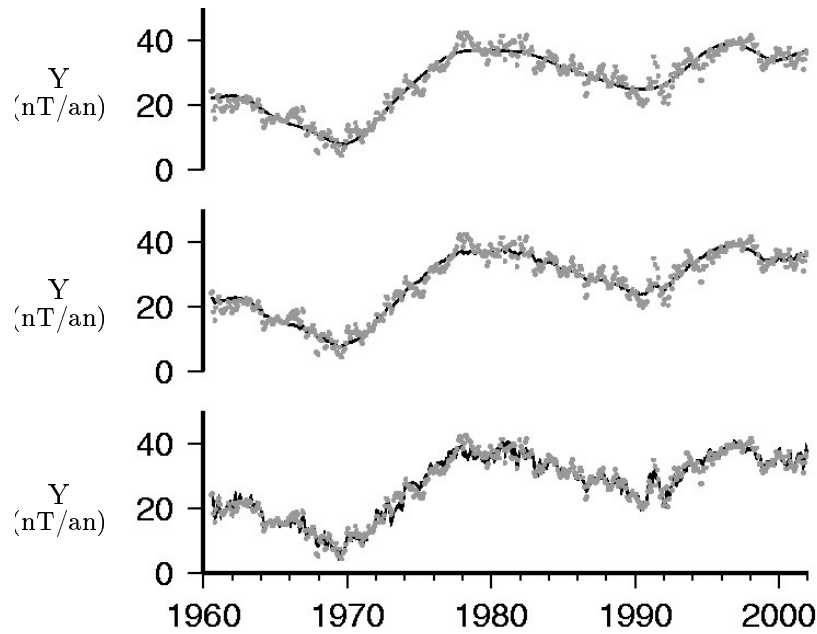


FIG. 1.18: Courbes de variation séculaire de la composante Y du champ magnétique à NKG. Les points représentent les données (moyennes mensuelles), tandis que sont représentées en trait plein diverses contributions du modèle CM4 [Sabaka *et al.*, 2004]. En haut : contribution du noyau seulement. Au milieu : noyau et champ induit. En bas : noyau, champ induit et champ externe.

Régularité des jerks

Le saut de champ magnétique associé à un jerk peut être décrit par [Alexandrescu *et al.*, 1996, par exemple]

$$B_i(t) = \beta_i H(t - t_0)(t - t_0)^\alpha$$

où $i = 1, 2, 3$ décrit les composantes du champ et β_i l'amplitude du jerk sur la composante considérée ; α est appelé la régularité du jerk. Si on pouvait effectivement représenter le champ magnétique de part et d'autre d'un jerk par des segments de droite, on aurait $\alpha = 2$, alors qu'en utilisant une analyse en ondelette, Alexandrescu *et al.* [1996] trouvent plutôt une valeur moyenne de $\alpha = 1.6$.

L'inversion donnant les paramètres du modèle CM4 (voir section 1.6) à partir des données magnétiques laisse envisager que les jerks ont une composante interne et une composante externe (cf Fig. 1.18).

Cycle apparent

Si on regarde seulement les jerks les mieux documentés, à savoir ceux qui ont lieu après 1969, il y en a quatre clairement identifiés : 1969, 1978, 1991 et 1999.

Les jerks de 1969 et 1991 sont tous les deux précédés par une variation séculaire décroissante, tandis que pour les jerks de 1978 et 1999, il s'agit une variation séculaire croissante. Dans le premier cas, le cycle effectif semble être de 22 ans tandis que dans le second cas, il y a 21 ans.

Ceci pose question : le cycle connu pour avoir une période de 22 ans est le cycle solaire qui contribue au champ magnétique externe, or les jerks sont d'origine interne, du moins en grande partie. Y a-t-il un mécanisme qui pourrait engendrer dans le noyau une fréquence forcée à 22 ans ? Par exemple, ne pourrait-on pas obtenir des ondes de torsion forcées à la période de 22 ans dans le noyau ? Cela serait possible si un champ magnétique externe, qui pénètre jusqu'au noyau, est lui-même porteur de la période de 22 ans ?

Les candidats les plus intuitifs à ce champ externe porteur de la période de 22 ans semblent être les anneaux de courants. Cependant, comme le manteau est conducteur, est-ce qu'un cycle à 22 ans peut traverser le manteau, qu'il provienne de l'extérieur de la Terre pour arriver jusqu'au noyau, ou l'inverse : est-ce qu'un champ magnétique induit avec une période de 22 ans peut traverser le manteau et laisser une trace significative dans les mesures magnétiques à la surface de la Terre ou à l'altitude des orbites des satellites ?

Leur corrélation avec d'autres phénomènes

En procédant à une analyse par ondelette du wobble de Chandler, Gibert *et al.* [1998] ont trouvé une étonnante corrélation entre les dates des secousses magnétiques et celles d'irrégularités brutales dans l'oscillation libre de l'axe de rotation de la Terre, alors que ces variations de l'oscillation libre sont généralement attribuées à des variations de la circulation atmosphériques et des courants marins. Ces irrégularités brutales suivent les jerks avec, au plus, 3 ans de retard.

A partir des données mensuelles magnétiques sur l'intervalle 1962-2000, Mandeia *et al.* [2000] trouvent une corrélation entre les variations de déclinaison et les variations de longueur du jour (LOD), ces premières devant ces dernières de 6 ± 2 ans.

Les variations de longueur du jour sont corrélées aux variations de moment cinétique du noyau [Jault *et al.*, 1988] et les changements de moment cinétique de la Terre engendrent des variations du climat. Pour l'anecdote, des chercheurs canadiens et japonais ont mis en évidence une corrélation entre les variations de longueurs du jour et l'abondance de saumon dans le Pacifique au cours du siècle passé, cette dernière étant synchrone avec les fluctuations de l'abondance de la sardine japonaise [Beamish *et al.*, 1999].

Dans sa thèse, Eymin [2004] s'est intéressée à la corrélation entre la pression moyenne à la surface du noyau et les jerks : les pics de pression coïncident avec les dates des jerks, sauf en 1985, date où aucun jerk n'était détecté jusqu'ici. Il semblerait qu'il y ait effectivement eu un phénomène analogue à un jerk localisé dans le Pacifique vers 1985 : il serait passé inaperçu à cause de la mauvaise couverture spatiale de l'océan Pacifique par des stations magnétiques. D'après Eymin [2004], les pics de pression précèdent les jerks d'un an ou deux.

Par analyse en ondelettes des données VLBI (*Very Large Baseline Interferometry*) de rotation de la Terre sur la période 1984-2004, Shirai *et al.* [2005] pointent deux changements significatifs de la phase de la nutation libre du noyau qui semblent coïncider avec les deux jerks de 1992 et 1998.

1.4.3 La conductivité du manteau

Les roches du manteau (principalement des silicates) ont une certaine conductivité électrique : la conductivité minimum de ces roches est de l'ordre de 10^{-6} S.m^{-1} , tandis que la conductivité de l'air est de $10^{-14} \text{ S.m}^{-1}$ [Schmucker, 1985]. L'eau de mer a, quant à elle, une conductivité de l'ordre de 4 S.m^{-1} [Garland, 1981]. La présence d'un champ magnétique induit alors des courants électriques qui vont générer un champ magnétique induit qui va s'opposer au champ inducteur. La conductivité du manteau est importante quand on considère le champ magnétique ayant son origine dans le noyau de la Terre (à partir de quelle fréquence voit-on ce champ magnétique à la surface de la Terre) ou un champ magnétique externe à la Terre (parvient-il jusqu'au noyau?).

L'étude de la réponse du manteau conducteur aux variations du champ magnétique externe permet de remonter la structure radiale de la conductivité du manteau. En première approximation, si on ne tient compte que des termes zonaux du développement (1.2) ($m = 0$), on peut définir une première réponse électromagnétique du manteau – la réponse Q – à une fréquence donnée

$$Q_n(f) = \frac{i_n(f)}{e_n(f)}$$

où $e_n = q_n^0$ et $i_n = g_n^0$. C'est la fonction de transfert entre les coefficients induits i_n et les coefficients e_n du champ inducteur externe. La principale difficulté avec cette réponse est qu'il faut connaître les coefficients e_n et i_n . Pour contourner cette difficulté, Banks [1969] a introduit les fonctions $A_{H,n}$ et $A_{Z,n}$ définies par

$$H = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{H,n} \frac{\partial P_n}{\partial \theta}$$

$$Z = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{Z,n} P_n$$

qui s'expriment en fonction des coefficients e_n et i_n

$$A_{H,n} = e_n(f) + i_n(f)$$

$$A_{Z,n} = n e_n(f) - (n+1) i_n(f)$$

Leur rapport est en général noté

$$W_n(f) = \frac{A_{Z,n}(f)}{A_{H,n}(f)}$$

et la réponse Q s'exprime en fonction du rapport W

$$Q_n = \frac{n - W_n}{n + 1 + W_n}$$

Cette réponse demande de connaître la dépendance en latitude de la source. Ce qui n'est pas le cas de la réponse suivante. Dans l'optique d'avoir le profil radial moyen de conductivité du manteau, d'autres méthodes ont été développées à partir de la réponse C définie par

$$C = \frac{Z}{\partial Z / \partial r} = - \frac{Z}{\vec{\nabla}_H \cdot \vec{B}_H}$$

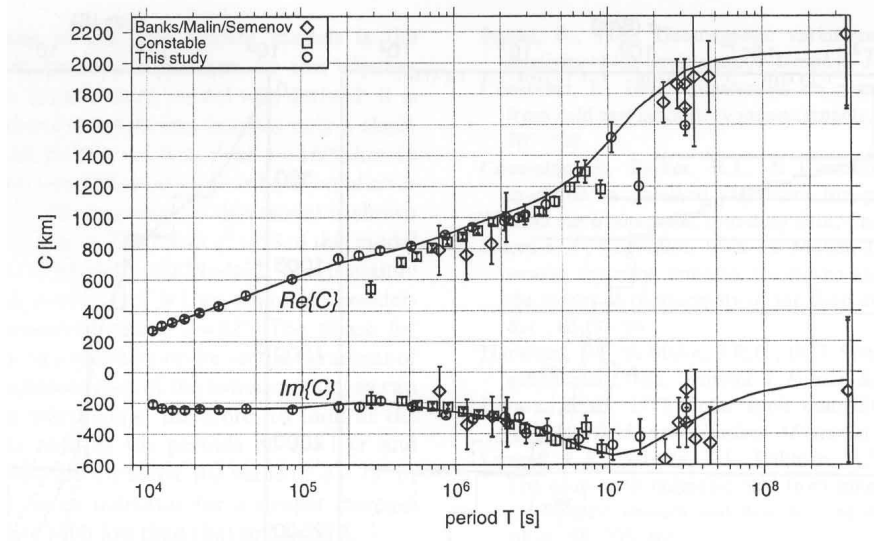


FIG. 1.19: Compilation de la réponse C (parties réelle et imaginaire) obtenue par différents auteurs [Olsen, 1999].

C'est la fonction de transfert entre la composante verticale et son gradient radial. Ce dernier s'exprimant en fonction de la divergence horizontale de la partie horizontale du champ (\vec{B}_H) car le champ magnétique est à divergence nulle. Cette nouvelle réponse, qui peut être exprimée en fonction de la réponse Q ,

$$C_n = \frac{a}{n+1} \frac{1 - \frac{n+1}{n} Q_n}{1 + Q_n} \quad (1.4)$$

est locale : la composante Z est toujours prise localement ; tandis que la gradient de la composante horizontale est estimé localement, ou à l'aide d'un réseau régional de stations magnétiques [Schmucker, 1985].

Son module est la distance horizontale sur laquelle on peut considérer la réponse C représentative de l'induction magnétique locale. C'est aussi la profondeur donnant le *barycentre* de la distribution des courants induits [Schmucker, 1985, Eq (21)]. Une phase nulle indique une faible induction tandis que pour une forte induction, la phase varie entre 0 et -90° . A contrario, dans ces estimations de la réponse C à partir des données de la station HER (Hermanus, Afrique du Sud), Roberts [1984] obtient une phase positive : il en conclut que la composante Z est contaminée par des courants électriques induits dans la mer toute proche de la station.

Dans le cas d'une forte induction, on peut s'intéresser au comportement asymptotique (la longueur d'onde du champ inducteur tend vers l'infini) de cette réponse. Cela conduit à définir la réponse à nombre d'onde nul C_0 qui a la propriété d'être indépendante de la source

$$C_n \rightarrow C_0 \quad \text{pour} \quad |C_n| \ll a/n \quad (1.5)$$

Excepté pour de très grandes périodes (dans ce cas, la condition $|C_n| \ll a/n$ n'est plus valable) ou pour des sources locales, la réponse C est très proche de sa valeur asymptotique C_0 .

Le champ magnétique externe est dominé aux hautes fréquences par le terme q_1^0 auquel contribue l'anneau de courant magnétosphérique [Banks, 1969] ainsi que la magnétopause [McLeod,

1994]. Cet anneau de courant génère un champ magnétique dont l'amplitude typique varie entre la dizaine de nT pendant les périodes calmes et plusieurs centaines de nT pendant les tempêtes magnétiques [Maus et Weidelt, 2004]

En inversant les réponses électromagnétiques, on peut remonter au profil moyen de conductivité radiale. La Fig. 1.20 représente un tel profil obtenu par Constable et Constable [2004]. Si la conductivité semble relativement bien contrainte à faible profondeur, elle ne l'est plus beaucoup à grande profondeur, comme le montre le tableau (1.1) où les valeurs de conductivité (en S.m^{-1}) sont présentées à différentes profondeurs pour différents auteurs. Pour sonder la conductivité à grande profondeur, il faut pouvoir aller chercher des signaux de très longues périodes (l'épaisseur de peau augmente proportionnellement à la racine carrée de la période). Mais, ce faisant, on se rapproche de la limite d'application de (1.5) : avec les valeurs de Harwood et Malin [1977], Olsen [1999] estime, avec une erreur de $\delta C = 480 \text{ km}$ (soit 21 %)

$$C = (2180 - 126 i) \text{ km} \quad \text{ce qui donne} \quad \frac{|C|}{a} \sim 0.34 \quad (1.6)$$

100 km	600 km	1000 km	2000 km	2900 km	auteurs
10^{-2}	0.1	10	100	–	McDonald [1957]
10^{-2}	–	–	–	–	Didwall [1984]
10^{-2}	–	–	2	–	Constable [1993]
10^{-2}	0.1	1	5-20	10-200	Olsen [1999]
10^{-3}	0.1	1	–	–	Utada <i>et al.</i> [2003]
10^{-2}	0.01	2	200	200	Constable et Constable [2004]
10^{-3}	0.1	1	-	-	Kuvshinov <i>et al.</i> [2005]

TAB. 1.1: Conductivité (en S.m^{-1}) à différentes profondeurs par différents auteurs.

La réponse C , qui peut être calculée en différents endroits, conduit à des profils différents de conductivité. On pourra comparer, par exemple, le profil sous le Pacifique Nord obtenu par Utada *et al.* [2003] à celui obtenu par Olsen [1998] sous l'Europe ou plus particulièrement, sous les Alpes françaises par Tarits *et al.* [2004]. Pour les Indes, on pourra consulter [Chandrasekhar, 2000], pour l'Australie [Campbell *et al.*, 1998]. Semenov et Jozwiak [1999] proposent, quant à eux, un profil pour la partie eurasiennne du globe. Dans son article de revue, Garland [1981, Fig. 8 et 9] montre le profil est-ouest de conductivité en profondeur sous le Japon, proposé par Rikitake dans les années 1970, ainsi que deux profils de conductivité obtenus en Australie (au centre et au sud-est) par Woods en 1979. Les profils de conductivité sous l'Amérique du Nord ont permis de détecter une anomalie magnétique, vraisemblablement liée à la présence de roches à forte teneur en graphite vers 200 km de profondeur [de Groot-Hedlin et Constable, 1993].

Les profils de conductivité obtenus sont sensiblement différents, même sur des relativement courtes distances, comme en Australie, en le centre et le sud-est de l'île ; ce qui a conduit à prendre en compte les variations latérales de conductivité dans les modèles de conductivité.

Dans ce but et tout récemment, avec les derniers catalogues de données magnétiques horaires qui présentent une bonne précision, Fujii et Schultz [2002] ont défini une nouvelle réponse

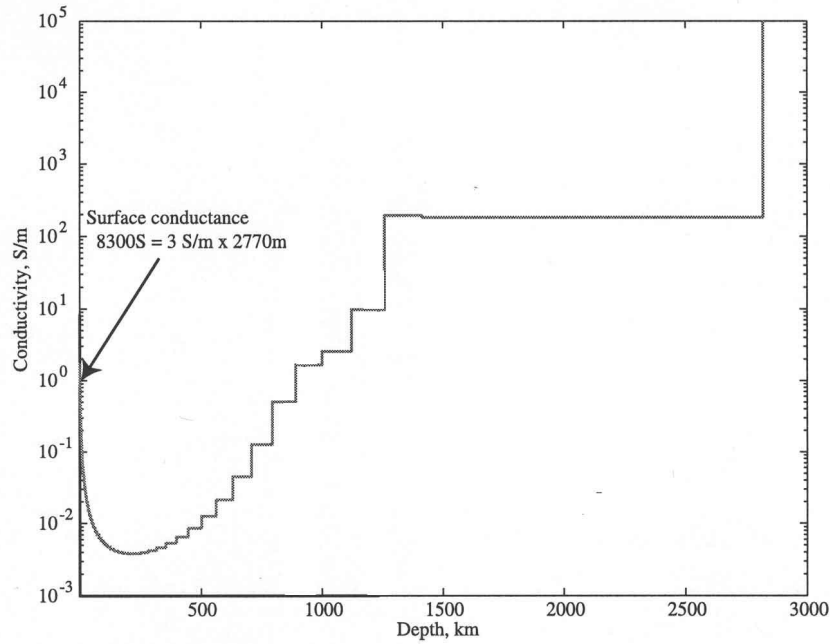


FIG. 1.20: Profil radial moyen de conductivité obtenu par Constable et Constable [2004].

électromagnétique de la Terre : la réponse D

$$D = \frac{a \sin \theta}{2} \frac{B_\phi}{B_\theta}$$

qui est sensible aux variations latérales de conductivité.

Dernièrement, en utilisant les données satellitaires de Magsat, Ørsted et Champ, Constable et Constable [2004] arrivent à distinguer les différences de conductivité entre les continents et les océans (cf Fig. 1.21). Kuvshinov *et al.* [2005] voient une variation de la conductivité au passage de Hawaii dans le Pacifique Nord.

Finalement, on peut mentionner l'existence hypothétique d'une couche fortement conductrice à la base du manteau : dans un travail commun, Mathews [2002] et Buffet [2002], ainsi que Herring, ont étudié l'influence du couplage électromagnétique noyau-manteau sur la nutation de la Terre. Ils concluent qu'une fine couche conductrice à la base du manteau ayant une conductance de 10^8 Siemens explique les données de nutation. Cependant, on ne voit pas l'influence de cette couche dans les données magnétiques, à cause de sa faible épaisseur, car son influence est proportionnelle à σh^2 (où σ est la conductivité de la couche et h sa hauteur).

Les jerks ont aussi été utilisés pour contraindre la conductivité du manteau inférieur. Ducruix *et al.* [1980] ont ainsi proposé que la conductivité était, partout dans le manteau, au plus de quelques centaines de S.m^{-1} . Backus [1983] conclut son étude sur le rôle filtrant du manteau en disant qu'il ne trouve pas de borne supérieure à la conductivité des couches du manteau les plus internes. Courtillot et Le Mouél [1984], en utilisant le formalisme de Backus [1983] en lien avec le jerk de 1969, concluent que la conductivité du manteau est probablement au plus de quelques centaines de S.m^{-1} dans plus de 97 % du volume du manteau.

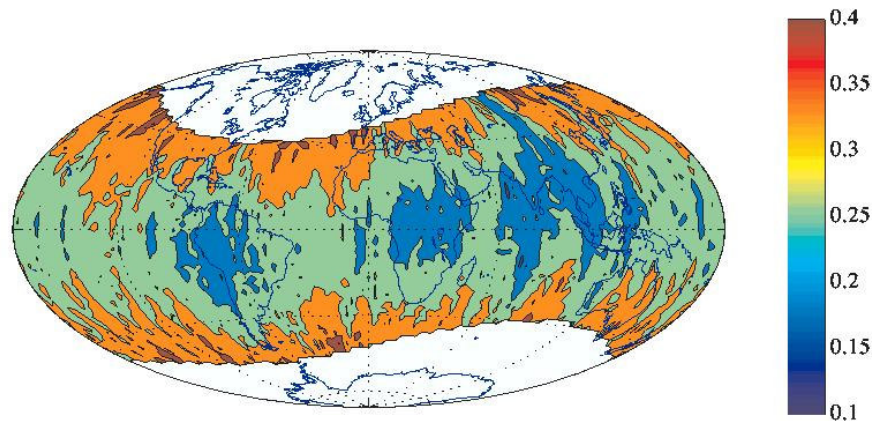


FIG. 1.21: Amplitude du champ magnétique induit dans le manteau rapportée au champ inducteur (supposé uniforme) de l'anneau de courant magnétosphérique lors d'un orage magnétique [Constable et Constable, 2004]. On distingue le contraste continent-océan à cette échelle de temps.

Plus récemment, McLeod [1994] détaille une réponse électromagnétique globale de la Terre consistante avec une conductivité de 3 S.m^{-1} à la frontière noyau-manteau. L'ordre de grandeur est confirmé par Alexandrescu *et al.* [1999] : toujours par une analyse en ondelette, ces auteurs trouvent une conductivité inférieure à 10 S.m^{-1} pour le manteau inférieur. Ces valeurs sont d'un ordre de grandeur inférieures à la conductivité du manteau inférieur trouvée par [Constable et Constable, 2004].

On pourra retenir que la conductivité du manteau est bien inférieure à 1 S.m^{-1} dans le manteau supérieur, valeur qui est atteinte vers une profondeur de 1000 km pour augmenter jusqu'au noyau pour atteindre, typiquement, 10 S.m^{-1} . En première approximation, on peut donc considérer le manteau comme isolant, au moins dans sa partie supérieure. Par exemple, les modèles de champ magnétique à la frontière noyau-manteau sont construits à partir d'un manteau complètement isolant.

1.4.4 La conductivité du manteau et du noyau en laboratoire

En utilisant une enclume à diamant, Peyronneau et Poirier [1989] déterminent la conductivité électrique d'un mélange de perovskite et de magnésio-wüstite pour une pression de l'ordre de 40 GPa dans une gamme de température de 25 à 400 degrés Celsius. En extrapolant à 1100 km de profondeur, ils obtiennent une conductivité de l'ordre de 1 S.m^{-1} . En continuant l'extrapolation, ils trouvent une conductivité à la frontière noyau-manteau de l'ordre de 50-100 S.m^{-1} .

D'autres extrapolations, supposant que la phase perovskite était relativement isolante (la conductivité de la base du manteau étant plutôt de l'ordre de 1 S.m^{-1}) [Dobson et Brodholt, 2000] ont été remises en cause par des résultats expérimentaux : la teneur en aluminium joue un rôle important [Xu *et al.*, 1998], de même que le rapport des teneurs en fer et en magnésium [Martinez *et al.*, 1997; Dobson et Brodholt, 2000] dans les différentes phases de l'olivine (perovskite, magnésio-wüstite et ringwoodite).

La conductivité du fer liquide à des pressions allant jusqu'à 7 GPa a été déterminée par Secco et Schoessin [1989]. Ils estiment la conductivité du noyau à $\sigma_c = 7 - 8 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$. Ce qui correspond à une diffusivité magnétique $\eta \sim 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ et à un temps de diffusion magnétique

$$\frac{c^2}{\pi^2 \eta} \sim 40\,000 \text{ ans} \quad (1.7)$$

pour un noyau de rayon $c = 3\,500 \text{ km}$.

1.5 Séparation fréquentielle des parties interne – externe

A cause de la conductivité du manteau, on peut se demander quelle partie du champ magnétique du noyau est effectivement mesurée en surface. Les hautes fréquences ne pénètrent pas beaucoup le manteau (cf Fig. 1.19). Plus la période augmente, plus la réponse C est importante. On peut donc définir une période limite en dessus de laquelle on voit le champ magnétique du noyau parfaitement.

Cette période a été évaluée à 4 ans par Curie [1967]. Comme les jerks sont d'origine interne, au moins dans une grande partie, cette période limite a été revue à la baisse, puisque le temps nécessaire pour passer d'une tendance à une autre au moment d'un jerk est au plus d'un an [Alexandrescu *et al.*, 1996].

On attribue donc les hautes fréquences au champ d'origine externe et à la partie d'origine interne induite dans le manteau conducteur jusqu'à une période typique de l'ordre d'un an. Les basses fréquences sont alors reliées au champ du noyau, sauf pour le cycle à 11 ans.

Dans le prolongement de cette idée, Gavoret *et al.* [1986] a essayé vainement d'expliquer le signal à 11 ans comme une combinaison linéaire du nombre de Wolf et de l'indice *aa*. Gubbins et Tomlison [1986] arrivent à la même conclusion par une méthode différente.

Je présente dans ce travail un mécanisme d'excitation forcée à 11 ans d'ondes de torsion dans le noyau. Leur propagation dans le noyau induit alors un champ magnétique à cette période, qui participe au champ mesuré dans les observatoires magnétiques. Bien que l'amplitude du champ induit par les ondes de torsion soit faible, elle dépend du modèle de champ magnétique interne au noyau, lequel est sous-estimé par rapport au cas géophysique. Ce qui expliquerait les conclusions de Gavoret *et al.* [1986] et Gubbins et Tomlison [1986].

1.6 Modélisations du champ magnétique terrestre

Je me contente de décrire très succinctement quelques modèles, sans rendre justice au travail de nombreuses personnes.

La plus grande compilation de données magnétiques historiques a donné le modèle *gufm1* [Jackson *et al.*, 2000] qui couvre l'intervalle 1590-1990. En supposant le manteau isolant, ce modèle décrit la composante radiale du champ magnétique à la frontière noyau-manteau.

Les mesures satellitaires effectuées par Magsat, Øersted et POGO, ont fournies un nombre considérable de données magnétiques. Les efforts faits sur un phénomène particulier (comme l'électrojet équatorial) à une fréquence donnée ont été généralisé au champ complet, à toutes les fréquences, par une inversion simultanée de tous les phénomènes pris en compte pour expliquer les données. Les données satellitaires sont couplées aux mesures terrestres pour tirer avantage du fait que l'ionosphère est un champ interne pour les satellites et externe pour les observatoires magnétiques, permettant une meilleure séparation des champs ionosphérique et magnétosphérique. Ce sont les *comprehensive models* dont les derniers sont *CM3* [Sabaka *et al.*, 2002] et *CM4* [Sabaka *et al.*, 2004].

1.7 Conclusions

On pourra retenir, d'une part, que l'utilisation d'un développement en harmoniques sphériques (Eq. (1.2)) du potentiel magnétique permet de prolonger le champ magnétique de la surface de la Terre jusqu'à la surface du noyau, en supposant le manteau isolant.

D'autre part, la composante Y de la variation séculaire à Chambon-La-Forêt, et en Europe plus généralement, est énigmatique (cf Fig. (1.15)) : cela a conduit à la découverte de secousses géomagnétiques.

Les quatre dernières secousses détectées en Europe semblent suivre un cycle proche de 22 ans, ce qui semble impliquer le cycle solaire.

Pourtant, les systèmes de courant externes ont une géométrie trop simple pour rendre compte des secousses. En effet, il est difficile avec un anneau de courant de créer un champ magnétique dans la direction est-ouest dont l'amplitude soit moitié de celle du champ dans la direction nord-sud (cf Fig. (2.8a) et (2.8b)). De même, l'induction dans le manteau est trop faible pour expliquer une telle amplitude de la composante Est : l'origine des secousses semble donc se situer dans le noyau. L'un des objectifs de cette thèse sera de déterminer s'il y a un lien entre les secousses géomagnétiques et des ondes qui semblent présentes dans le noyau : les ondes de torsion.

Chapitre 2

Données magnétiques à grande période

2.1 Transformée de Fourier

Le mécanisme d'excitation des ondes de torsion via des courants modulés par le cycle solaire est d'autant plus efficace que la période du cycle est grande, bien qu'un phénomène de résonance pourrait amplifier certaines fréquences. J'ai donc cherché à voir des cycles de période supérieure à 1 an, comme par exemple un cycle à 70 ans [Rivin, 1985]. Dans cette étude spectrale des données magnétiques, seule la fréquence centrale du cycle est recherchée. Déterminer l'amplitude exacte d'un cycle à l'aide du spectre est loin d'être trivial, et ce d'autant plus lorsqu'on a recours à des fenêtres de pondération, car leur effet sur l'énergie d'une raie spectrale est difficilement quantifiable [Max et Lacoume, 1996].

La durée finie des séries temporelles utilisées est un paramètre fortement limitant dans ce type d'étude. J'ai essayé d'être attentif à l'interaction entre la durée finie du signal et le signal lui-même, laquelle interaction peut être importante aux basses fréquences.

Je commence par expliquer les méthodes de mise en forme des données utilisées, puis je les applique aux données magnétiques avant de conclure.

Dans ce chapitre, j'utiliserais la terminologie de *brut* pour parler d'un spectre non apodisé (spectre obtenu sans utilisation de fenêtre de pondération).

2.1.1 Facteur de normalisation

J'ai utilisé la librairie libre FFTW disponible sur le web (www.fftw.org) [Frigo et Johnson, 2005]. J'ai utilisé Matlab comme benchmark pour mon programme.

Si le signal échantillonné est noté $x(k)$, alors sa transformée de Fourier discrète $\hat{x}(k)$ est

$$\hat{x}(k) = \alpha \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi i k / N}$$

où α est un facteur de normalisation et N le nombre de valeurs échantillonnées du signal. Si on choisit comme signal $x(k) = \sin(2\pi k/N)$, qui est une fonction propre des filtres linéaires de valeur propre unitaire, on obtient $\hat{x}(k) = -i\alpha N/2$. Le facteur de normalisation de la densité spectrale, qui est le carré du module de la transformée de Fourier, est donc

$$|\alpha|^2 = \left(\frac{2}{N}\right)^2$$

Toutes les figures présentes dans ce manuscrit représentent la densité spectrale du signal, quand il s'agit de représenter une transformée de Fourier. Par la suite, j'utiliserais la terminologie de spectre pour désigner la densité spectrale du signal observé. La plupart des données magnétiques utilisées dans cette étude sont celles disponibles sur le site web de l'IPGP (<http://beaufix.ipgp.jussieu.fr/rech/mag>). Ce sont des moyennes mensuelles. J'ai systématiquement utilisé la série temporelle la plus longue disponible pour chaque station magnétique. Les périodes sont données en années, les fréquences en an^{-1} ; quant aux spectres, leur unité est le $\text{nT}^2 \cdot \text{an}^{-1}$.

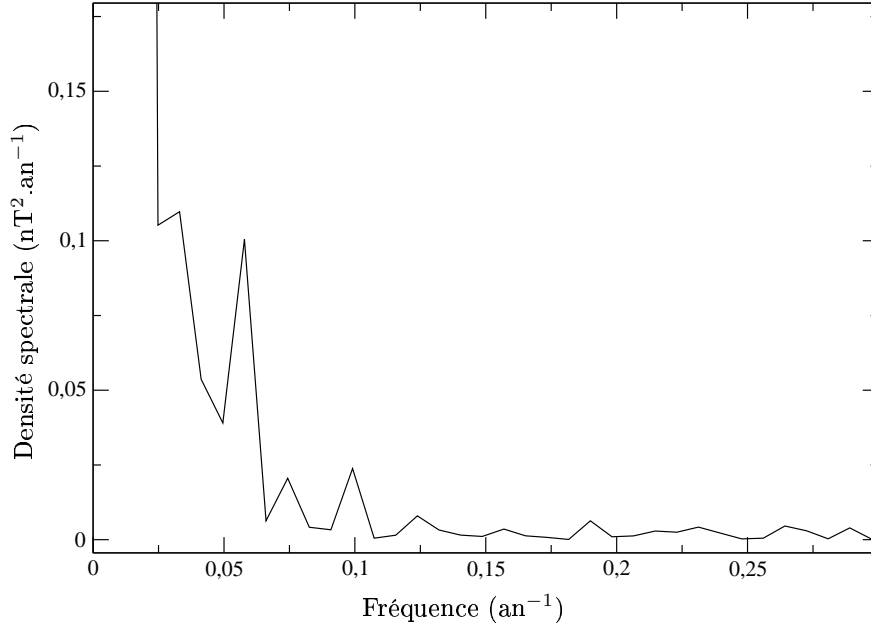


FIG. 2.1: Spectre *brut* de la variation séculaire de la composante Y de Chambon-La-Forêt (CLF).

Les deux fréquences importantes dans un spectre sont la fréquence de coupure, et la résolution. La fréquence de coupure f_c est la fréquence maximale observable pour un pas d'échantillonnage dt donné. D'après le critère de Shannon,

$$f_c = \frac{1}{2dt}$$

Pour les données magnétiques mensuelles, le pas d'échantillonnage étant d'un mois, on a

$$dt = \frac{1}{12} \text{ an} \quad \text{et donc} \quad f_c = 6$$

Quant à la résolution fréquentielle df , elle est fixée par la durée totale du signal $T = Ndt$

$$df = \frac{1}{N dt}$$

2.1.2 Spectre brut de \dot{Y} à CLF

Pour un algorithme de transformée de Fourier rapide, un nombre de données égal à une puissance de 2 est nécessaire : le signal est donc complété par des zéros. Il faut en tenir compte dans le calcul du facteur de normalisation qui devient

$$|\alpha|^2 = \left(\frac{2}{N_d} \right)^2$$

où N_d est le nombre de données avant le rajout de zéros. Le fait de rajouter des zéros accroît artificiellement la résolution qui est fixée par le nombre de données N après rajout des zéros.

Pour observer la densité spectrale de diverses composantes du champ magnétique, la partie mise en forme des données est essentielle ; j'ai considéré les étapes suivantes :

1. Enlever la moyenne temporelle
2. Effectuer la transformée de Fourier avec le facteur de normalisation prenant en compte les données réelles

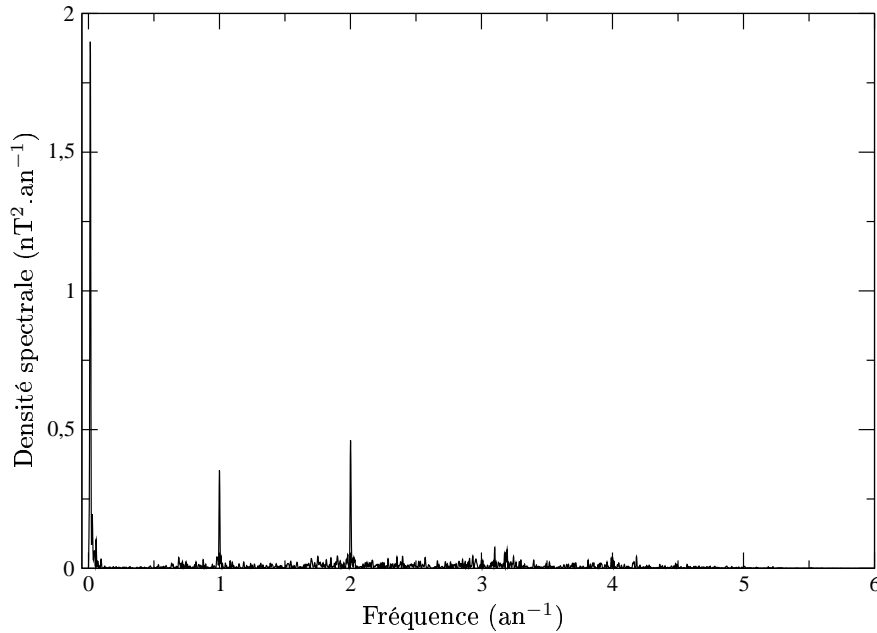


FIG. 2.2: Spectre brut de la variation séculaire de la composante Y de Chambon-La-Forêt (CLF).

Une série temporelle peut être représentée comme le produit entre un signal magnétique de très longue durée – typiquement plusieurs milliers d’années – $s(t)$ et une fonction porte

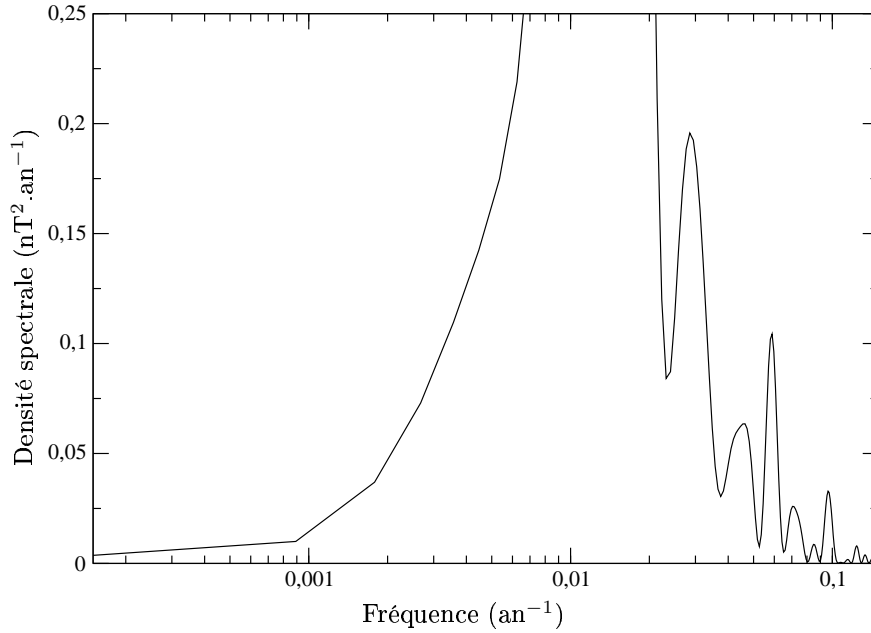


FIG. 2.3: Agrandissement de la Fig. 2.2 aux basses fréquences.
L'abscisse est en échelle logarithmique (en an^{-1}).

dont la largeur (2τ) correspond à l'intervalle de temps sur lequel on a fait des mesures, soit typiquement 100 ans dans les séries mensuelles.

Maintenant, le spectre est la convolution entre la transformée de Fourier du signal $s(t)$ – qui est en quelque sorte le spectre « parfait », puisque que la durée d'enregistrement est presque infinie – et la transformée de Fourier de la fonction porte, à savoir

$$\frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi f}$$

qui a des lobes secondaires importants qui peuvent fortement interagir avec le spectre *parfait* du signal $s(t)$. Il en résulte une détérioration du spectre effectif par rapport au spectre *parfait* de $s(t)$, en particulier aux basses fréquences.

Cette interaction se traduit par un décalage en fréquence et une modification de l'amplitude. Dans cette étude, je ne me suis intéressé qu'à obtenir les fréquences des cycles, la détermination de l'énergie d'une raie spectrale étant une question délicate, comme je l'ai expliqué en début de chapitre.

Dans le but de diminuer cette interaction, on va utiliser des fenêtres de pondération pour essayer de se rapprocher du spectre *parfait*.

2.1.3 Fenêtres de pondération

Pour diminuer cette influence, on peut faire appel aux fenêtres de pondération. Je présente ici la fenêtre de Hamming (à ne pas confondre avec la fenêtre de Hanning) et la fenêtre

de Blackman-Harris, qui seront utilisées pour tester la variabilité du spectre aux basses fréquences.

Fenêtre de Hamming

Pour un signal de durée finie, compris entre $-T_m$ et T_m , la fenêtre de Hamming $f(t)$ est

$$f(t) = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{\pi t}{T_m}\right) \quad \text{pour } |t| < T_m$$

Une telle fonction permet de diminuer les pics secondaires : l'amplitude du premier lobe est diminuée de 28 dB (pour une amplitude normalisée du pic central) ; pour comparer, l'amplitude du premier lobe d'une simple fonction porte est de -9 dB [Max et Lacoume, 1996]. La contrepartie est que l'apodisation tend à élargir le pic principal.

Du point de vue énergétique, utiliser une telle fenêtre est synonyme de perte d'énergie. Il faut, pour en tenir compte, multiplier le spectre par le facteur

$$A = \frac{N}{\sum_{i=0}^{N-1} |f(t_i)|^2} \quad (2.1)$$

ou le signal par \sqrt{A} [Max et Lacoume, 1996].

Fenêtre de Blackman-Harris (BH4)

La fenêtre de Blackman-Harris à quatre termes, pour un signal de durée T , est

$$f(t) = 0.35875 - 0.48829 \cos(2\pi \frac{t}{T}) + 0.14128 \cos(4\pi \frac{t}{T}) - 0.01168 \cos(6\pi \frac{t}{T})$$

Une telle fonction permet de diminuer très fortement les pics secondaires : l'amplitude du premier lobe est diminuée de 92 dB [Dahlen, 1982]. Le facteur de correction de perte d'énergie est toujours donné par (2.1). Ces deux fenêtres sont présentées avec ou sans le facteur de correction de la perte d'énergie Fig. 2.4.

Mise en forme et traitement des données

Les étapes de mise en forme et de traitement des données avec les fenêtres de pondération sont les suivantes

1. Déterminer la fenêtre de pondération, ainsi que le facteur de normalisation \sqrt{A}
2. Effectuer le produit entre la série de données et la fenêtre de pondération
3. Enlever la moyenne temporelle
4. Effectuer la transformée de Fourier avec le facteur de normalisation α prenant en compte les données réelles

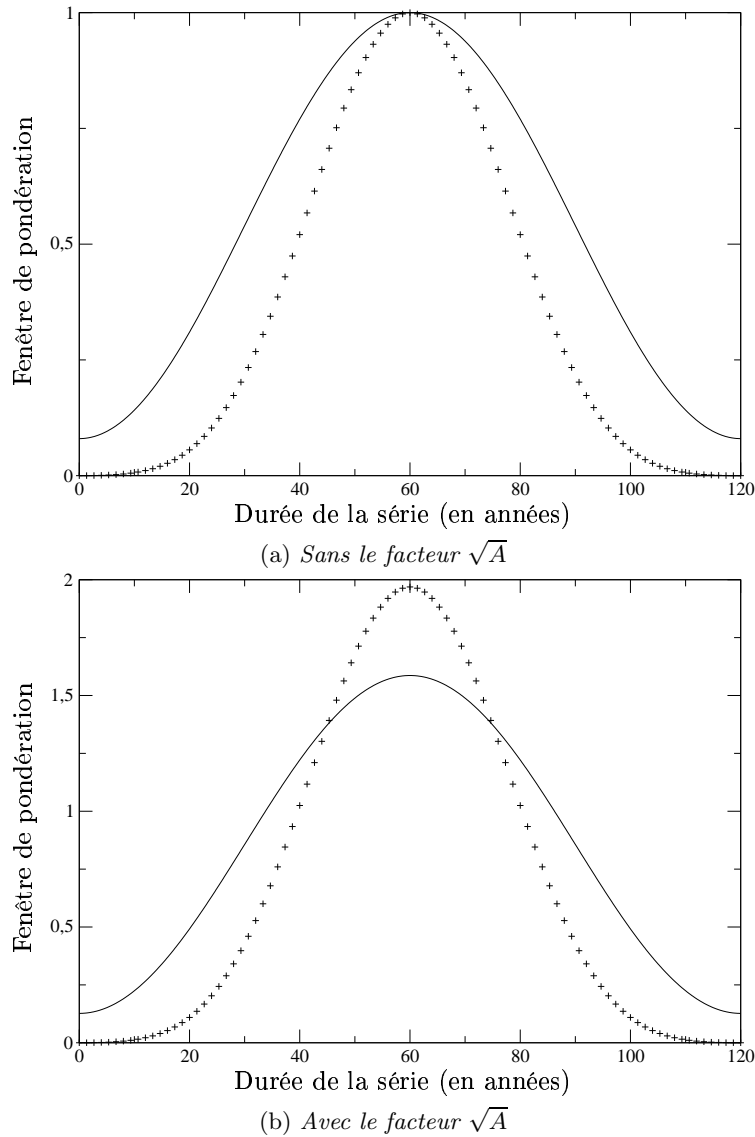


FIG. 2.4: Fenêtre de Hamming (trait plein) et BH4 (+) avec (b) ou sans (a) le facteur de correction de perte d'énergie pour un signal de durée 120 ans.

Influence d'une fenêtre d'apodisation sur le spectre

Dahlen [1982] a étudié l'influence des fenêtres d'apodisation sur les spectres sismiques. Il a montré que l'utilisation de telle fenêtre de pondération permettait de limiter l'interaction mode à mode visible sur la Fig. 2.5a. Cette interaction se traduit de deux manières : d'une part, par un décalage en fréquence des modes, et d'autre part, par une dissymétrie des pics de part et d'autre de la fréquence centrale. Par exemple, le mode ${}_0S_{29}$ interagit de façon constructive avec le mode ${}_0S_{30}$ et destructive avec le mode ${}_0S_{28}$. L'utilisation d'une fenêtre de pondération permet, en sismologie, de remédier à ces problèmes (cf Fig. 2.5b). Les fréquences théoriques sont retrouvés avec une précision largement inférieure aux incertitudes de mesure. Sans fenêtre de pondération, la fréquence des modes était déterminée avec une erreur systématique de

plusieurs μHz (sur des fréquences de l'ordre du mHz).

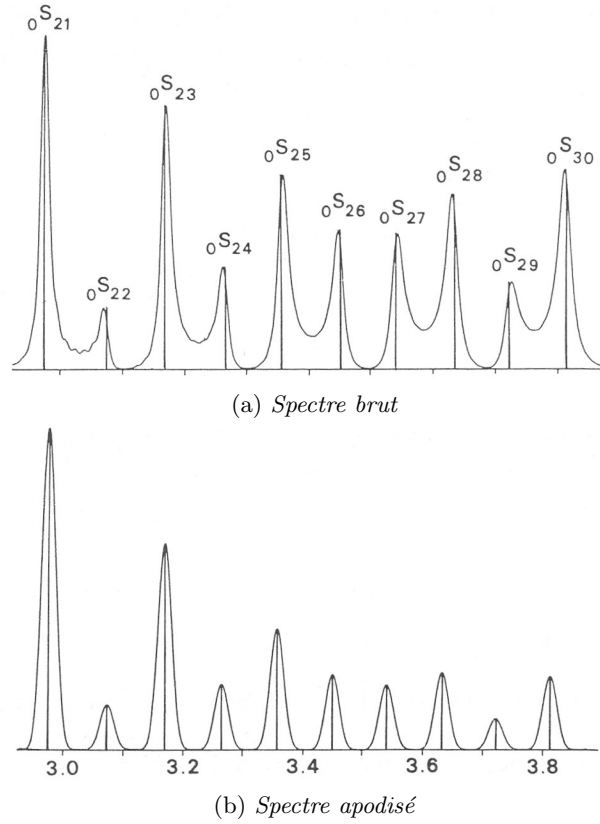


FIG. 2.5: Spectre sismique synthétique, d'une durée de 20 heures, échantillonné toutes les 20 secondes, avec (b) et sans (a) fenêtre BH4. Les traits verticaux correspondent aux fréquences théoriques des pics. En abscisse, la fréquence en mHz.

On peut donc s'attendre, lors de l'utilisation de fenêtre d'apodisation, à un décalage en fréquence des pics, ainsi qu'à une meilleure symétrie des pics par rapport à leur fréquence centrale.

La variabilité entre le spectre brut et le spectre apodisé semble parfois tellement importante que j'ai plutôt comparé deux spectres apodisés. Comme le facteur d'atténuation des lobes secondaires varie suivant la fenêtre, l'amplitude des pics correspondant va aussi varier, comme le note Dahlen [1982, Fig. 5, reprise en partie Fig. 2.5.] lorsqu'il précise que les échelles en ordonnée sont indépendantes les unes des autres.

Par contre, si en comparant les spectres apodisés avec les fenêtres de Hamming et BH4, les fréquences centrales des cycles sont égales avec une incertitude Δ_f , alors je dirai qu'il semble exister un cycle à cette fréquence. La valeur de cette incertitude sera calibrée sur le nombre de Wolf. En effet ce dernier, étant connu depuis longtemps, on possède de longues séries temporelles. De plus, on peut le reconstruire à partir de traceurs de l'activité solaire sur plusieurs milliers d'années [Peristikh et Damon, 2003].

2.1.4 Calibrage sur le nombre de Wolf

Le champ magnétique du soleil a un cycle de 22 ans dans son changement de polarité qui se manifeste par un cycle à 11 ans bien marqué dans les données magnétiques à la surface de la Terre. La durée de de dernier cycle a varié au cours des siècles entre 9 et 12 ans [Friis-Christensen et Lassen, 1991]. On peut donc s'attendre à une bande de fréquence entre 9 et 12 ans dans le spectre du nombre de Wolf. Vigouroux [1996] a montré que cette partie du spectre pouvait être considérée comme significative. Elle a construit des séries temporelles aléatoires pour étudier le bruit correspondant dans le spectre et elle a calculé un seuil statistique au-delà duquel une amplitude spectrale peut être considérée comme significative. On peut donc conclure que l'intervalle 9-12 ans contient de l'information, mais laquelle ? Le spectre du nombre de Wolf 2.6a est celui qu'on trouve le plus, et notamment dans [Vigouroux, 1996]. Cependant, il change beaucoup dès qu'on utilise une fenêtre de pondération, comme sur la Fig. 2.6 (b)-(c).

De nombreux auteurs ont cherché ou noté des cycles à grande période dans le nombre de Wolf ou dans des traceurs de l'activité solaire comme les éléments cosmogéniques. Gleissberg [1958] a détecté un cycle à 80 ans, maintenant connu sous le nom de cycle de Gleissberg. Depuis d'autres cycles ont été annoncés, parmi lesquels on peut noter un cycle vers 210 ans et un autre entre 2200 et 2400 ans [Peristikh et Damon, 2003, voir les références citées dans cet article].

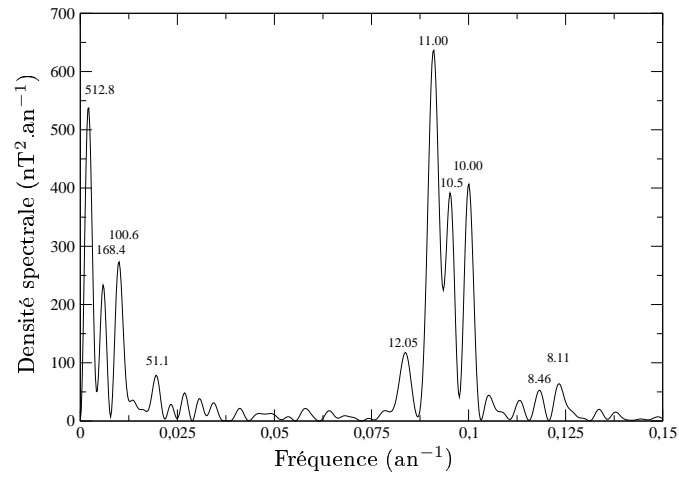
Il semble qu'il y ait deux écoles pour la détermination de ces cycles à très grande période. La première travaille sur les traceurs de l'activité solaire, comme les éléments cosmogéniques. Récemment, une analyse des séries du ^{14}C conclut sur la persistance d'un cycle à 88 ans pendant 12 000 ans [Peristikh et Damon, 2003], ainsi que des cycles à 208 et 2200 ans. Les autres pics du spectre s'expliquant par une interaction de ces pics entre eux. Ainsi la modulation du cycle à 88 ans avec le cycle à 208 ans se traduit par deux pics à

$$\left(\frac{1}{88} - \frac{1}{208}\right)^{-1} = 91.7 \text{ ans} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{88} + \frac{1}{208}\right)^{-1} = 84.6 \text{ ans}$$

La modulation entre les cycles à 88 ans et 2200 ans se traduit, quant à elle, par deux pics à 61.8 ans et 152 ans. Expliquer des pics par modulation d'amplitude entre plusieurs cycles est une idée déjà utilisée à plusieurs reprises dans le passé. On pourra noter son utilisation dans la détermination de la variabilité solaire dans des données de thermoluminescence de sédiments marins [Cini Castognoli *et al.*, 1988].

Une autre école se base sur une analyse en ondelette du nombre de Wolf. Ogurtsov *et al.* [2002] et Le et Wang [2003], par exemple, concluent sur l'existence de deux bandes de fréquences : la première entre 50 et 80 ans, et la seconde entre 90 et 140 ans. Dans sa Fig. 2, Ogurtsov *et al.* [2002] trace les limites en résolution de l'analyse en ondelette, limitée au maximum à 114 ans, ce qui n'empêche pas Le et Wang [2003], avec les mêmes données, d'aller jusqu'à 150 ans.

Est-ce un hasard ? On peut comparer les dates obtenues par Cini Castognoli *et al.* [1988] à celles du spectre apodisé (c) de la Fig. 2.6. Pour ce spectre, j'ai utilisé la longueur maximale de la série du nombre de Wolf dont je disposais (1610-1995), incluant notamment le minimum



(a) Spectre brut, 1700-1995

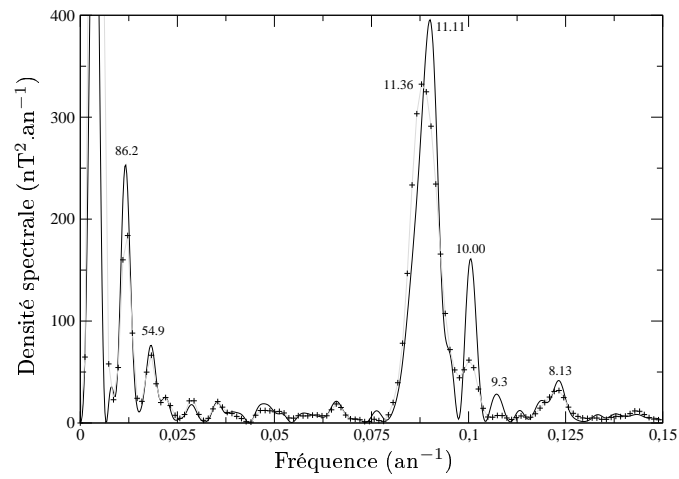
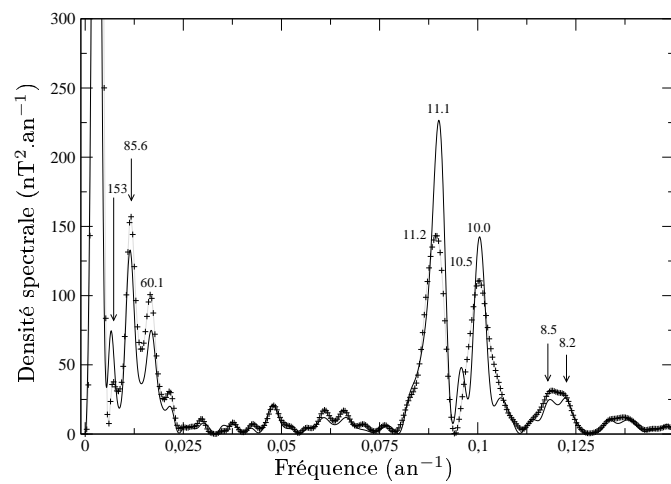
(b) Spectre apodisé : hamming (trait plein) et BH_4 (+), 1700-1995(c) Spectre apodisé : hamming (trait plein) et BH_4 (+), 1610-1995

FIG. 2.6: Spectre du nombre de Wolf, pour différentes longueurs de la série de données et différentes fenêtres d'apodisation.

de Maunder, lequel est exclu dans le spectre (b) de la Fig. 2.6. Les pics à 60.1, 85.6 et 153 ans correspondent bien avec les cycles à 88 ans et sa modulation par le cycle à 2200 ans (pics à 61.8 et 152 ans, [Cini Castagnoli *et al.*, 1988]). Comme l'apodisation élargit les pics, le pic à 85.6 ans pourrait contenir aussi les pics à 84.6 et 91.7. Il faut noter aussi le décalage entre les spectres apodisés pour le pic vers 150 ans. Ce décalage semble normal, puisque la durée de la série temporelle est inférieure à trois fois la période du cycle. Empiriquement, il me semble nécessaire d'avoir des séries temporelles dont la durée est – au minimum – de quatre ou cinq fois la période recherchée pour estimer la fréquence d'un pic par transformée de Fourier.

On peut comparer les spectres (b) et (c) autour de 11 ans : La seule différence est la prise en compte (c) ou non (b) du minimum de Maunder, pendant lequel le cycle à 11 ans avait une amplitude bien moindre que d'habitude. C'est une des limitations de la transformée de Fourier : elle donne une information globale, sur toute la durée de l'enregistrement. Si un cycle a une amplitude variable, la transformée de Fourier donne une information sur l'amplitude moyenne du cycle. Les spectres apodisés montrent une structure en deux bandes autour de 10.0 et 11.1 ans. Or ceci n'est pas visible dans les résultats publiés d'analyse par ondelette de Le et Wang [2003] ou Ogurtsov *et al.* [2002]. Il se peut très bien que cette structure en deux bandes soit un artefact dû aux fenêtres de pondération. Il semble cependant qu'elle soit caractéristique du cycle à 11 ans car on la retrouve dans les données magnétiques.

L'écart en fréquence Δ_f est calibré à partir du spectre (c) de la Fig. 2.6. Il est fixé à

$$\Delta_f = 6.10^{-4} \text{ an}^{-1}$$

La partie du spectre se rapprochant de la fréquence nulle est de moins en moins significative au fur et à mesure que l'on se rapproche de la fréquence nulle, à cause de la durée finie des données. Cela se voit dès que l'on compare un spectre apodisé et un spectre non apodisé (comparer le spectre brut Fig. 2.6a et le spectre apodisé 2.6b). Une fenêtre d'apodisation est un moyen numérique de donner moins de poids dans le calcul du spectre aux très basses fréquences. Cependant, la fenêtre d'apodisation interagit « plus ou moins » avec le signal. Ce critère en fréquence permet de fixer une limite sur ce « plus ou moins » en utilisant deux fenêtres de pondération et en comparant leur interaction respective avec le signal.

2.1.5 Spectres apodisés de la variation du champ magnétique

Spectres de CLF

Les spectres des composantes X , Y et Z de la variation séculaire à CLF sont relativement représentatifs des spectres que l'on peut trouver aux autres stations.

Au premier abord, ce qui frappe les spectres de la Fig. 2.7, c'est la variation annuelle qui domine les spectres de variation séculaire. Bien que les spectres aient été représentés seulement jusqu'à la fréquence de 1.2 an^{-1} , la variation demi-annuelle est le trait caractéristique des spectres de variation séculaire comme on peut le voir sur la Fig. 2.2. L'apodisation ne change pas la domination du spectre par les variations annuelles et demi-annuelles. Pour les spectres apodisés, la variation annuelle est la plus importante sur la composante X , la plus faible sur la composante Y . Intermédiaire sur la composante Z , elle pourrait sembler fortement modulée.

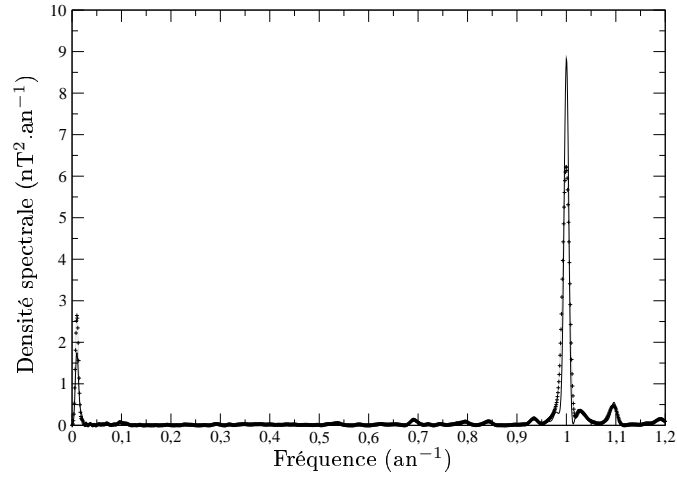
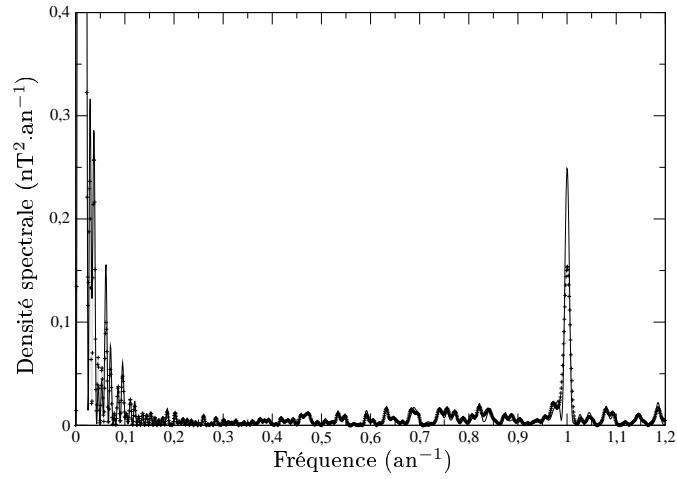
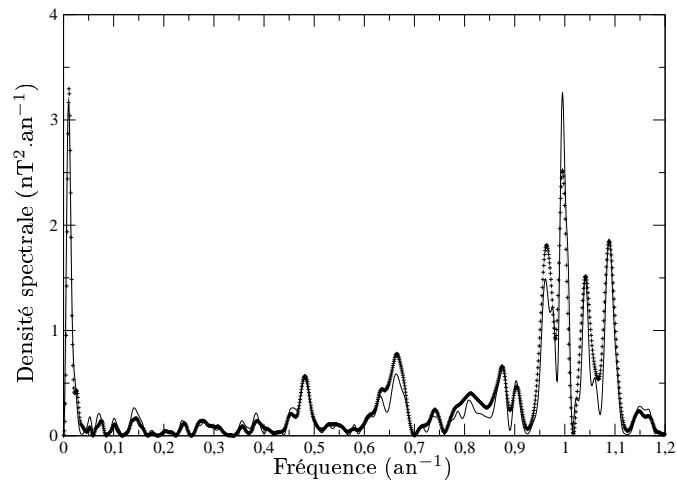
(a) Composante \dot{X} à CLF(b) Composante \dot{Y} à CLF(c) Composante \dot{Z} à CLF

FIG. 2.7: Spectre de la variation séculaire du champ magnétique à Chambon-La Forêt. Hamming (trait plein) et BH4 (+).

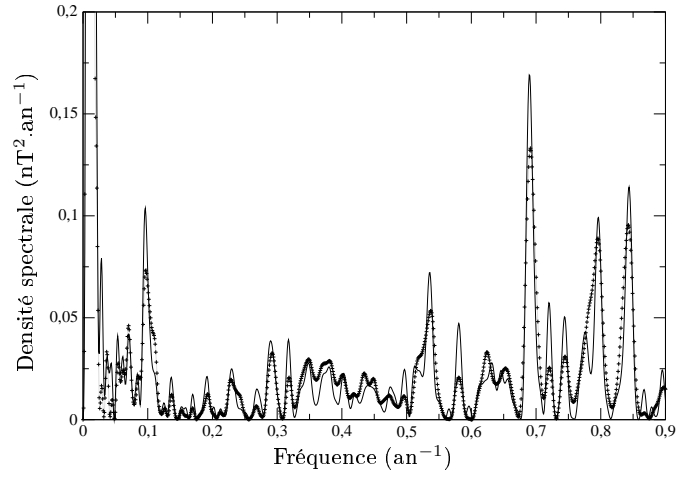
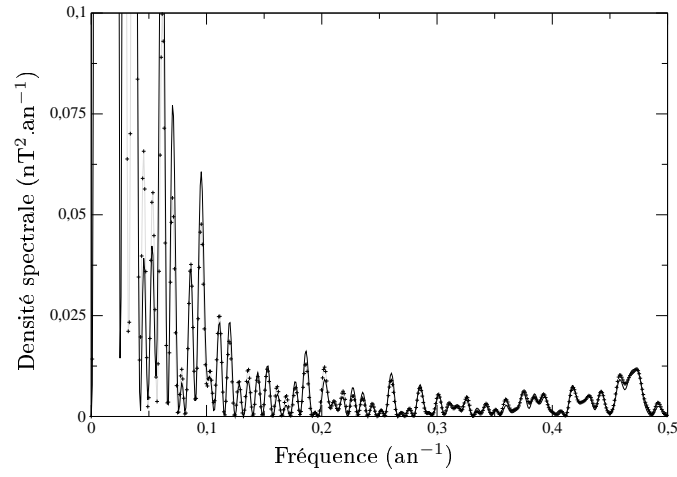
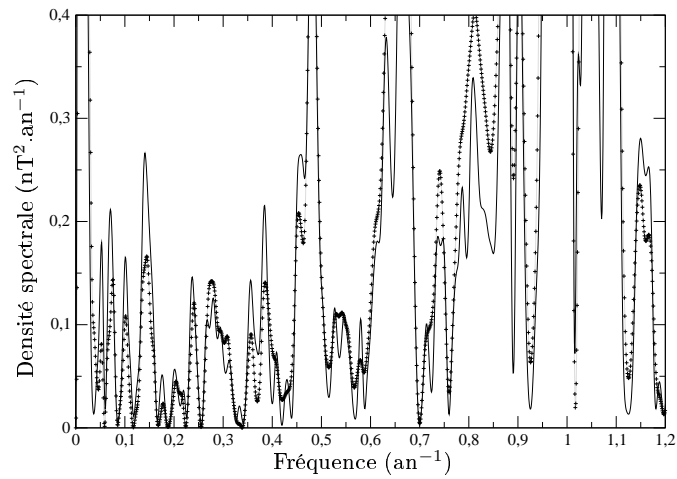
(a) Zoom de la composante \dot{X} à CLF(b) Zoom de la composante \dot{Y} à CLF(c) Zoom de la composante \dot{Z} à CLF

FIG. 2.8: Zoom de la Fig. 2.7. Hamming (trait plein) et BH4 (+).

La composante Y a le spectre le plus « calme » entre 1 et 11 ans, tandis que c'est la composante Z, la plus sensible à perturbations externes, qui est la plus « chahutée ». C'est sur cette composante que la variation annuelle semble fortement modulée.

Quant au cycle à 11 ans, il est maximal sur la composante Z, minimum sur la composante Y. L'amplitude du cycle sur la composante Z est le double de celle de la composante Y. D'après Harwood et Malin [1977], l'amplitude typique de la composante Z est de l'ordre de 20 nT, la composante Z étant en moyenne plus grande (au maximum d'un facteur 2) que la composante horizontale.

Il faut cependant se rappeler que ce n'est qu'une indication, car la transformée de Fourier n'est pas l'outil adapté pour étudier un cycle dont l'amplitude varie au cours du temps. Elle ne donne qu'une information moyennée sur la durée de l'enregistrement. Mais ce qui était vrai au début du XIX^{ème} siècle ne l'est plus forcément maintenant.

Cycles à grande période (supérieur à 1 an)

Le critère Δ_f , calibré sur le nombre de Wolf, permet de trouver un certain nombre de cycles de période supérieure à un an. Je n'ai retenu que les cycles dont l'amplitude est au moins du même ordre de grandeur que celle du cycle à 11 ans. En effet, d'après Harwood et Malin [1977], l'amplitude typique de ce cycle est de l'ordre de 20 nT. Des cycles de plus petite amplitude n'auraient pas beaucoup de sens, car les incertitudes de mesure en début de série sont du même ordre.

Parmi les séries mensuelles disponibles sur le web, certaines ont une durée de plus de cent ans : il s'agit des séries des stations CLF (121 ans), NGK (103 ans), FRD (102 ans), HON et SIT (101 ans). Ces cinq séries ont été explorées.

Le cycle à 11 ans se présente, la plupart du temps, par un motif en deux pics, comme on peut le voir sur 2.6c. Les deux pics sont bien identifiés par le critère de détection seulement sur CLF.y (la notation CLF.y désigne la composante Y de la variation séculaire à CLF). En général, un des deux pics seulement est détecté par le critère de sélection, sauf sur NGK.x, NGK.z, HON.x et HON.z où les spectres apodisés sont relativement différents à cette fréquence, ce qui pourrait être une indication d'une forte interaction du signal avec la durée finie de la série.

Un cycle vers 16-19 ans est présent dans les spectres apodisés sur CLF.x, CLF.z, NGK.y, NGK.z, FRD.z, SIT.y et les trois composantes de la variation séculaire à ESK, soit dans 9 séries parmi les 15 (5 stations, 3 composantes).

Un cycle vers 29-30 ans est détecté sur CLF.y, SIT.y et HON.x, soit dans 3 séries parmi les 15.

2.1.6 Les longues séries de Paris

Je remercie Mioara Manda qui m'a gracieusement donné les séries de déclinaison et d'inclinaison de Paris.

La série de l'inclinaison couvre la période 1671-2003 et la série de la déclinaison la période 1540-2003. Les données sont des moyennes annuelles et il manque certaines données. A partir de ces données, j'ai construis les deux séries suivantes :

- * déclinaison : la série couvre la période 1677-2003, soit 326 ans, avec un pas d'échantillonnage annuel. 24 années manquantes ont été rajoutées en utilisant une interpolation linéaire
- * inclinaison : la série couvre la période 1786-2003, soit 217 ans, avec un pas d'échantillonnage annuel. 20 années manquantes ont été rajoutées en utilisant une interpolation linéaire

Les deux procédures de mise en forme précédentes ont été utilisées pour comparer les spectres avec et sans fenêtre de Hamming ; le critère empirique, développé à la section précédente, est utilisé pour déterminer les cycles « de confiance ».

La série de l'inclinaison

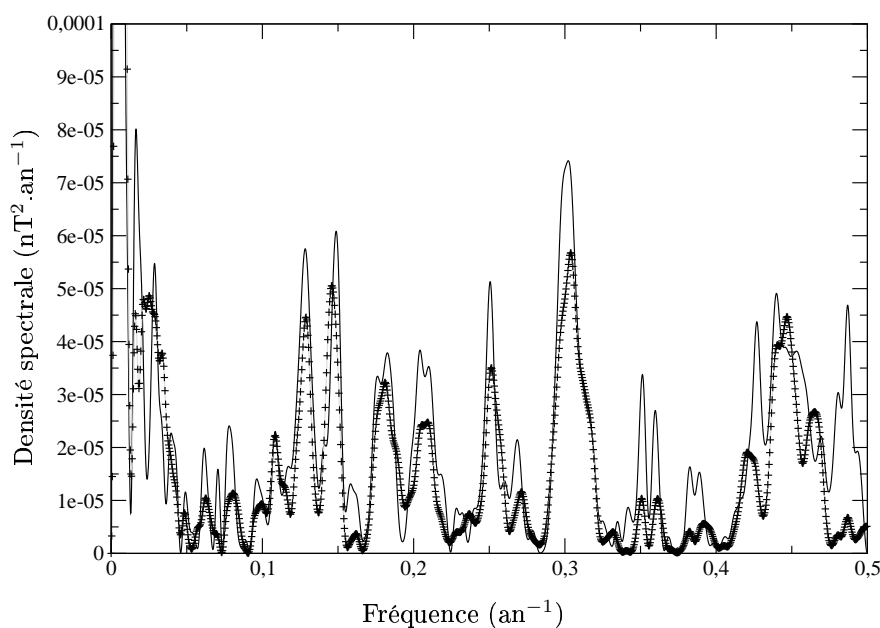


FIG. 2.9: Spectre de l'inclinaison. Hamming (trait plein) et BH4 (+). En abscisse, la fréquence (en an^{-1}).

Sur la Fig. 2.9, on peut trouver des pics à 3,3, 4, 7,8, 12, 17 et 62 ans. Le pic à 7,2 ans ne respecte pas le critère. Le cycle à 11 ans est caractéristique, le pic à 10 ans étant détecté par le critère Δ_f .

La série de la déclinaison

Sur la Fig. 2.10, on peut trouver des pics à 2,7, 2,9, 3,6, 5,7, 6,2, les deux pics du cycle à 11 ans, 13,7, 25 et 71 ans.

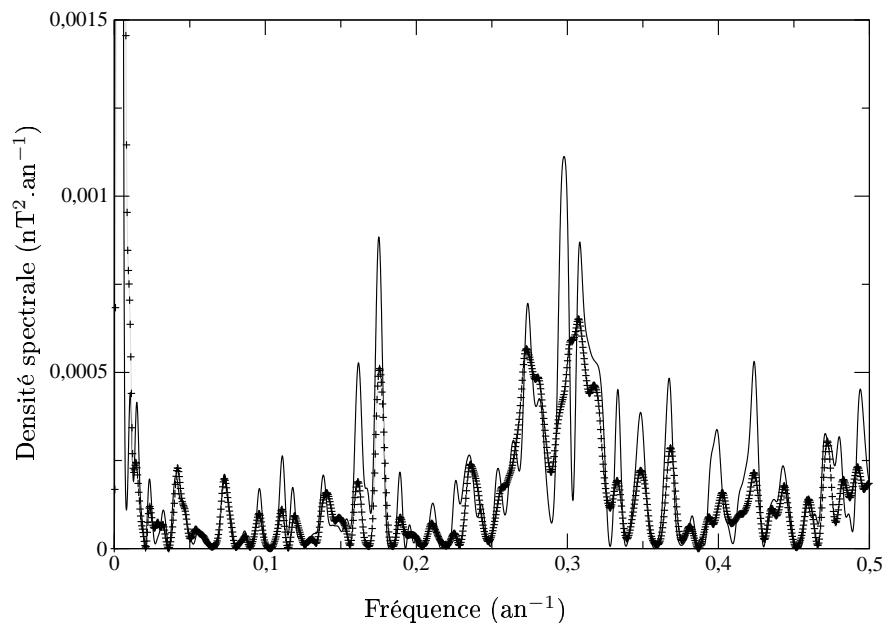


FIG. 2.10: Spectre de la déclinaison. Hamming (trait plein) et BH4 (+).
En abscisse, la fréquence (en an^{-1}).

Le pic à 70 ans annoncé par Rivin [1985] est retrouvé. Cet auteur trouve aussi une trace de ce cycle dans les données de rotation de la Terre sur elle-même, ce qui pourrait laisser penser à une origine non solaire. Il ne semble pas apparaître non plus dans le spectre du nombre de Wolf.

En conclusion, la transformée de Fourier semble adaptée à la recherche de cycle dans de très longues séries magnétiques (d'une durée de l'ordre de cinq fois la durée du cycle recherchée au moins). Dans le cas où les séries temporelles sont plus courtes, il est préférable d'utiliser la méthode de filtrage par moyenne glissante.

2.2 Filtrage par moyenne glissante

Dans leur article, Harwood et Malin [1977] ont déterminé le cycle à 11 ans dans les séries magnétiques pour évaluer la réponse Q du manteau conducteur à cette fréquence. Les valeurs obtenues ont été reprises récemment par Olsen [1999] dans sa compilation des réponses C.

En refaisant les mêmes opérations que Harwood et Malin [1977], j'obtiens des amplitudes 50% plus importantes du cycle à 11 ans dans les différentes stations regardées.

2.2.1 Harwood et Malin

Alors que Harwood et Malin [1977] ont utilisé des moyennes annuelles, j'ai utilisé les données mensuelles décrites précédemment. Les filtres utilisés sont des moyennes sur des fenêtres

glissantes, centrés sur la date courante. De tels filtres sont des filtres au moins du premier ordre, dont la transformée de Fourier est

$$\frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi f}$$

Alors que l'enveloppe est du premier ordre, le sinus s'annule en fonction de la valeur fixée de t . Un tel signal χ filtré est noté $\langle \chi \rangle_t$ où t est en année. La notation $RV_{t_1,t_2}(\chi)$ ¹ désigne la différence

$$RV_{t_1,t_2}(\chi) = \langle \chi \rangle_{t_1} - \langle \chi \rangle_{t_2}$$

où χ est soit une composante du champ magnétique. La tendance linéaire du signal obtenu est enlevée. La Fig. 2.11 représente le signal $RV_{3,11}(H)$ pour cinq stations magnétiques : CLF, NGK, TUC, HON et SIT ; la Fig. 2.12 le signal $RV_{3,11}(Z)$ pour les mêmes stations. On pourra comparer les signaux associés aux quatre dernières stations avec la Fig. 1 de [Harwood et Malin, 1977]. En moyenne, l'amplitude trouvée est environ 50% plus importante. Il faudrait reprendre l'inversion de Harwood et Malin [1977] pour voir comment la réponse électromagnétique Q du signal est modifiée.

Ceci modifierait la réponse C calculée par Olsen [1999] à partir des valeurs de Harwood et Malin. La seule différence réside dans la manière dont la tendance a été enlevée : Harwood et Malin enlèvent un polynôme, dont l'ordre est en moyenne trois ou quatre, alors que j'ai retiré seulement la tendance linéaire.

2.2.2 Cycle à 11 ans sur la composante Y

Une trace du cycle à 11 ans a été recherchée sur la composante Y du champ magnétique. En effet, on s'y attend à la vue du spectre de la composante Y à CLF (Fig. 2.8b). La comparaison avec le spectre de la composante X à CLF (Fig. 2.8a) permet de dire que la trace du cycle à 11 ans à le même ordre de grandeur sur les deux composantes. C'est bien ce que l'on peut observer sur la Fig. 2.14. La Fig. 2.13 montre que le cycle à 11 ans sur la composante Y est identifiable sur les stations HYD, KOD, TRD et SIT. En Europe, CLF.y est relativement représentative de ce qui se passe à 11 ans. On peut identifier un cycle à 11 ans, de faible amplitude (de l'ordre de 10 nT), entre 1930 et 1970 notamment (Fig. 2.13). Par contre, entre 1900 et 1930, puis en 1970 et 2000, un cycle à 22 ans est identifiable. On peut remarquer que le signal $RV_{3,11}(Y)$ ne devrait avoir que des périodes entre 3 et 11 ans. Un filtrage par moyenne glissante utilise un filtre au moins du premier ordre. On peut donc en conclure que le cycle à 22 ans est légèrement sous-estimé dans son amplitude.

2.2.3 Cycle à 22 ans sur la composante Y

Ce qui a été fait pour le cycle à 11 ans peut être fait pour le cycle à 22 ans

$$RV_{3,22}(\chi) = \langle \chi \rangle_3 - \langle \chi \rangle_{22}$$

¹J'ai repris la notation RV utilisée par Harwood et Malin [1977].

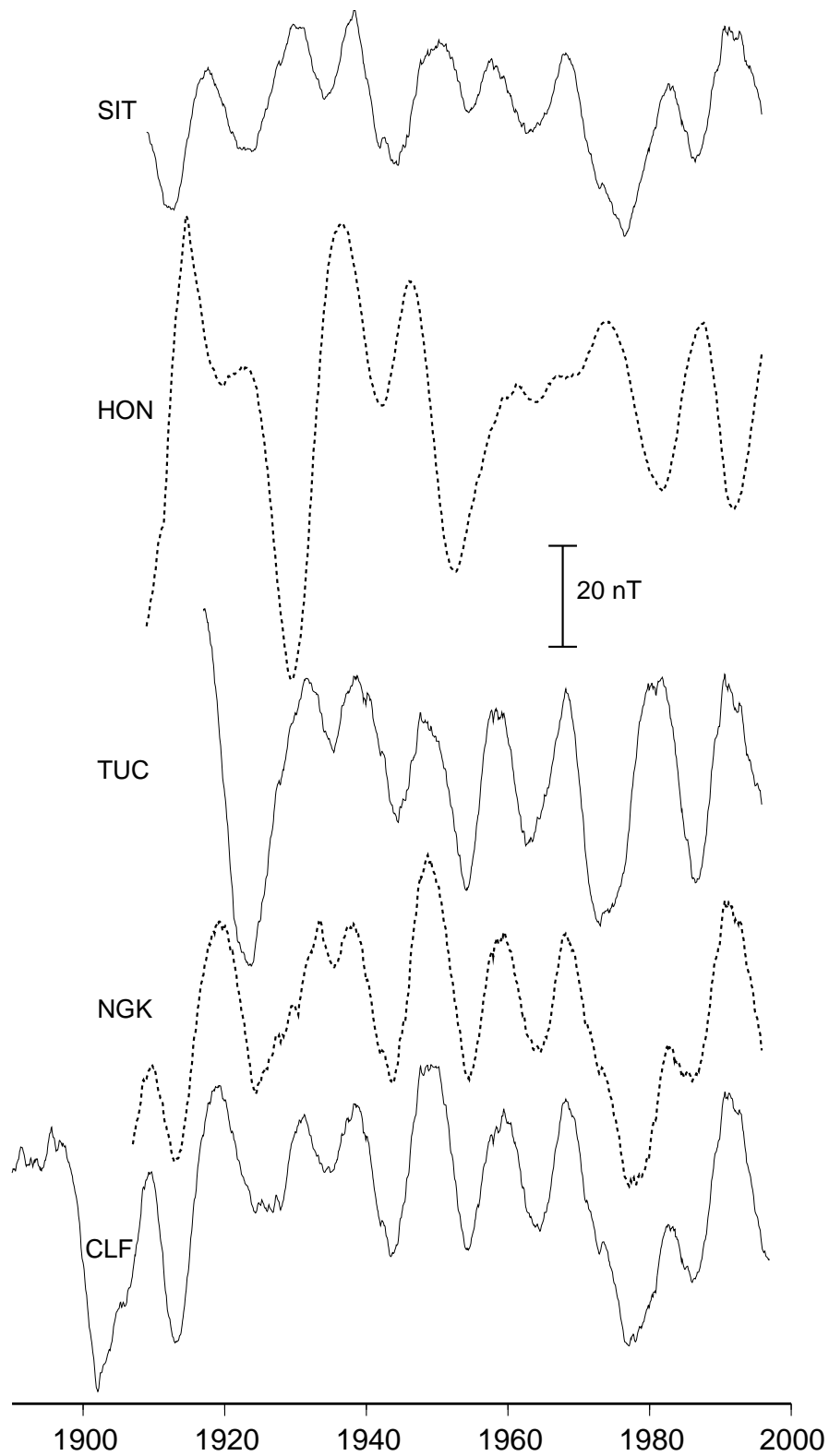
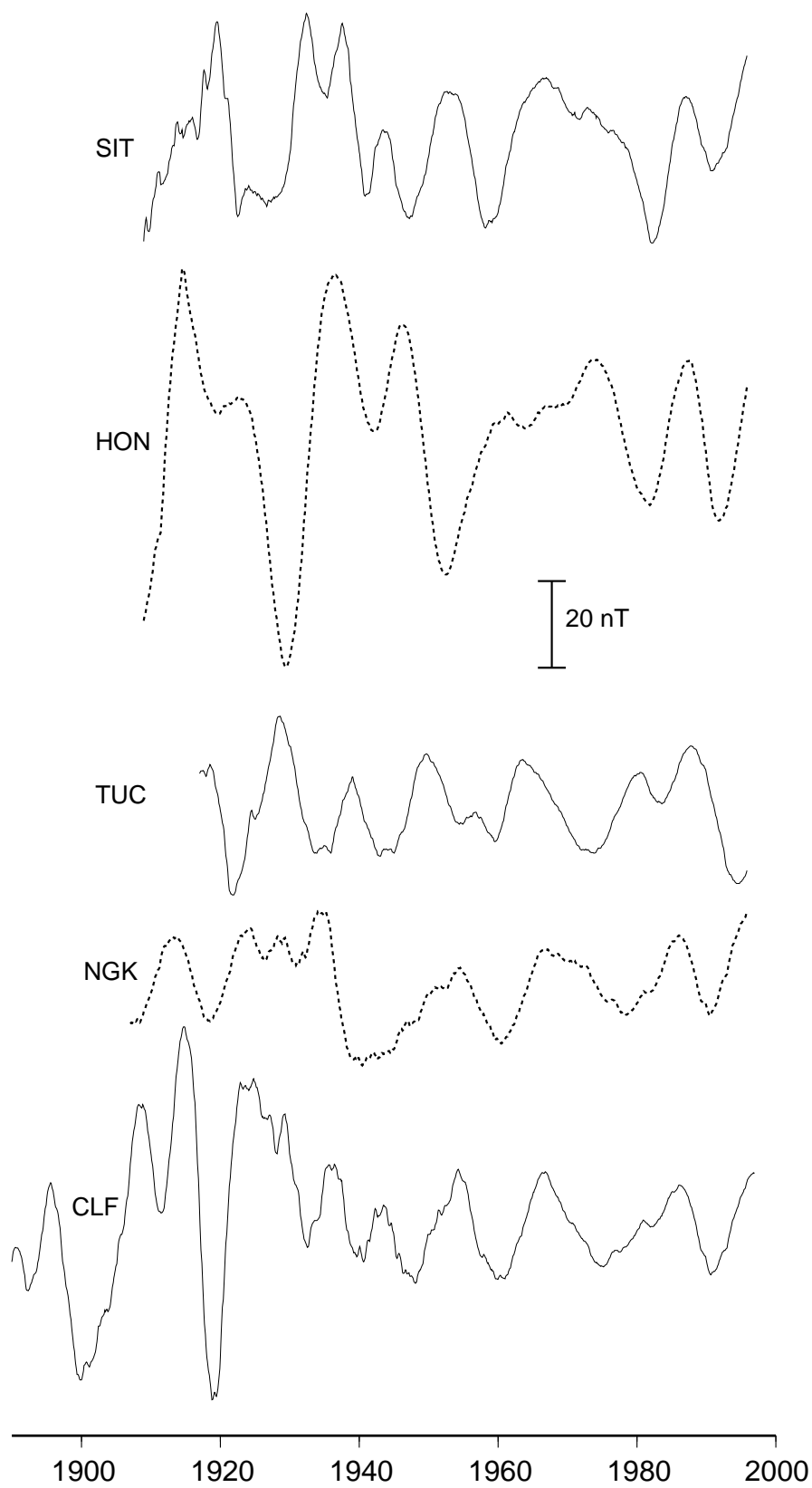
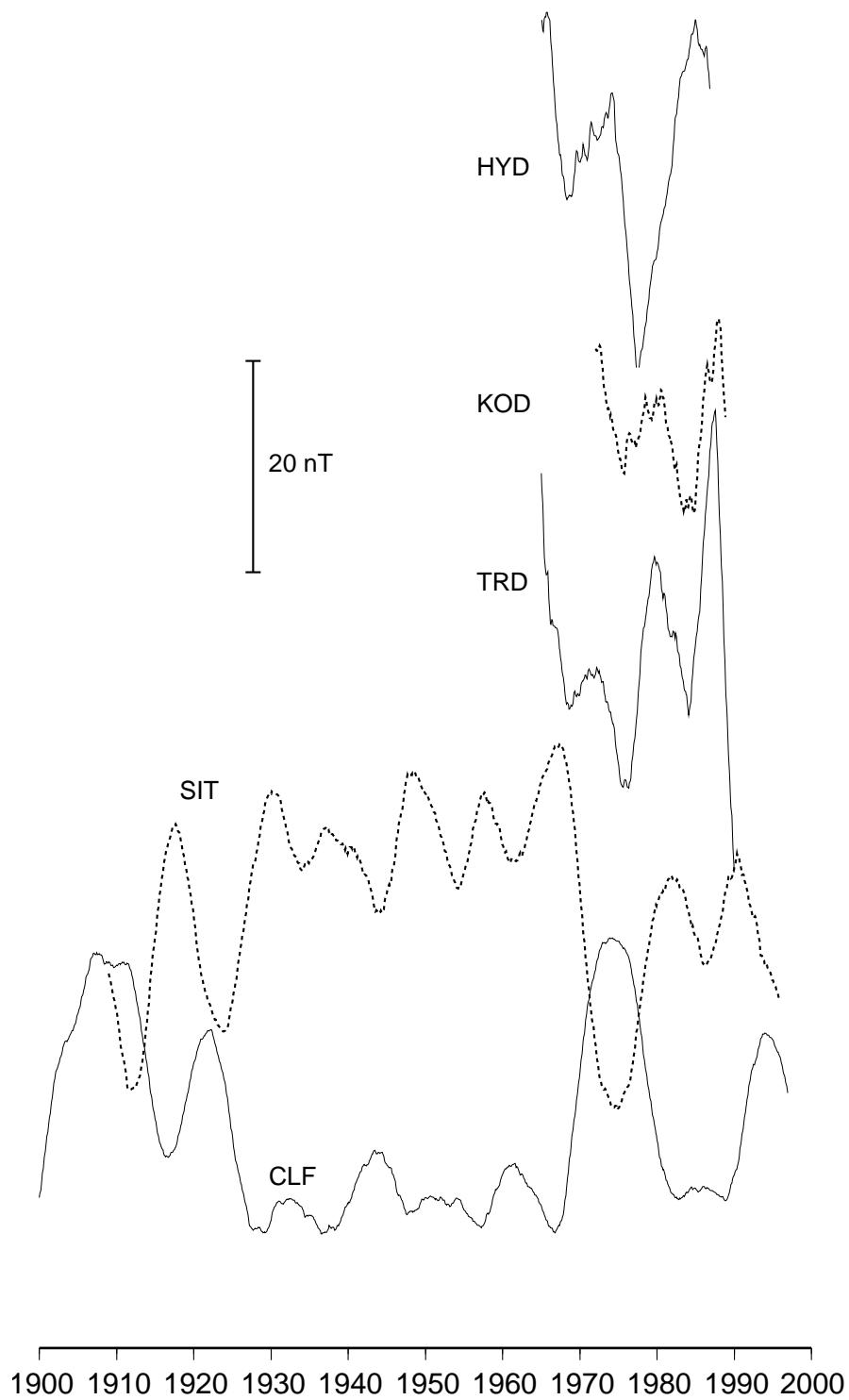


FIG. 2.11: Signal $RV_{3,11}(H)$ pour les cinq stations citées. Les pointillés ne sont là que pour une meilleure lecture.

FIG. 2.12: Signal $RV_{3,11}(Z)$ pour les cinq stations citées.

FIG. 2.13: Signal $RV_{3,11}(Y)$ à différentes stations.

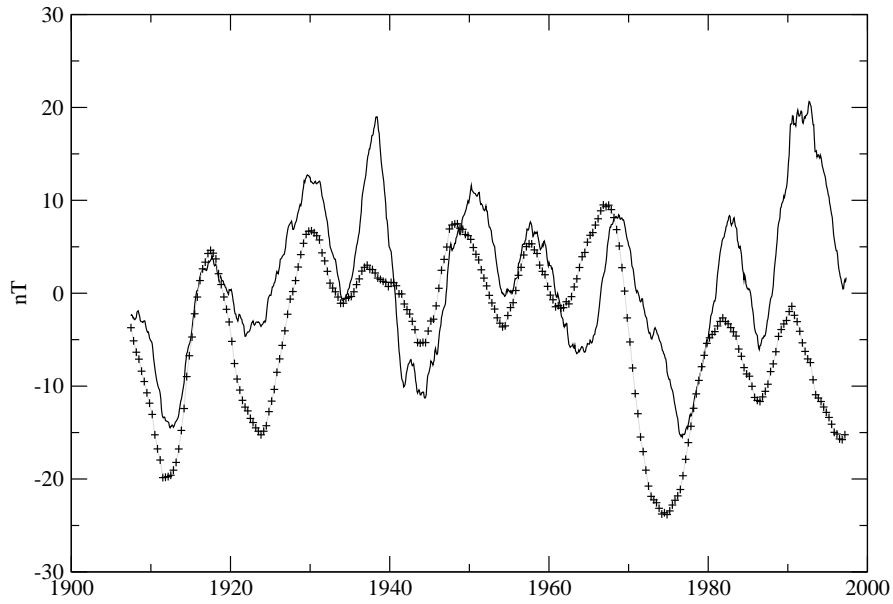
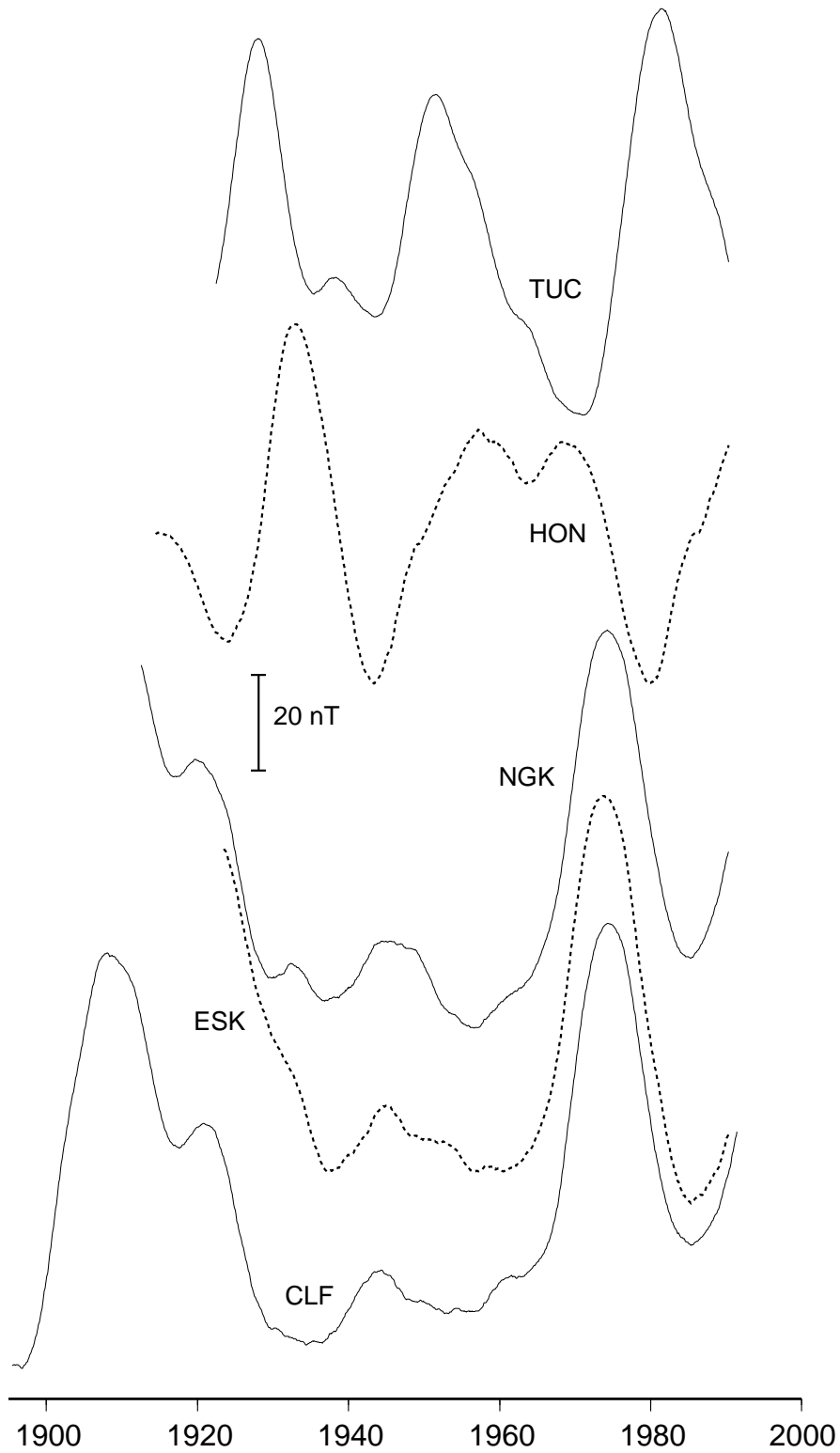


FIG. 2.14: Signal $RV_{3,11}(X)$ (en trait plein, nT) et le signal $RV_{3,11}(Y)$ (+, nT) à Sitka (code iaga SIT).

Le cycle à 22 ans est visible à partir de 1960 en Europe (cf Fig. 2.15). Or, sur les quarante dernières années, le cycle des secousses semble être de 22 ans. Les autres secousses du début du siècle correspondent aussi à un signal de période environ 22 ans dans $RV_{3,22}(Y)$. Ce même cycle semble aussi présent sur $RV_{3,22}(X)$ (cf Fig. 2.18). C'est moins clair sur la composante Z (cf Fig. 2.19).

Dans sa thèse, Eymin [2004] s'est intéressée à la corrélation entre la pression moyenne à la surface du noyau et les secousses magnétiques : les pics de pression coïncident avec les dates des secousses magnétiques (à un ou deux ans près), sauf en 1985, date où aucune secousse n'était détectée jusqu'ici. Il semblerait qu'il y ait effectivement eu un phénomène analogue à une secousse localisée dans le Pacifique vers 1985 : elle serait passée inaperçue à cause de la mauvaise couverture spatiale de l'océan Pacifique par des stations magnétiques. D'après Eymin [2004], les pics de pression précèdent les secousses d'un an ou deux. Parmi les stations qui ont une série temporelle suffisamment longue pour espérer voir le cycle à 22 ans par cette technique de filtrage (qui provoque des pertes en début et en fin de série), il y a la station d'Honolulu. On détecte effectivement un minimum dans la dérivée temporelle de $RV_{3,22}(Y)$ à HON en 1985 (cf Fig. 2.17).

Les périodes comprises entre 3 et 22 ans sont les principales constituantes du signal $RV_{3,22}$. Pour séparer entre les contributions entre ces différentes périodes, on peut représenter le signal $RV_{11,3}(Y)$ à Chambon-La-Forêt (Fig. 2.20) ou le signal $RV_{22,11}(Y)$ (Fig. 2.21). Le signal $RV_{11,3}(Y)$ est plus marqué que le signal $RV_{22,11}(Y)$ pour les secousses de 1913 et 1925, tandis que c'est l'inverse en 1901. Pour les secousses de 1969 et 1978, les deux signaux sont de même amplitude.

FIG. 2.15: Signal $RV_{3,22}(Y)$ à différentes stations.

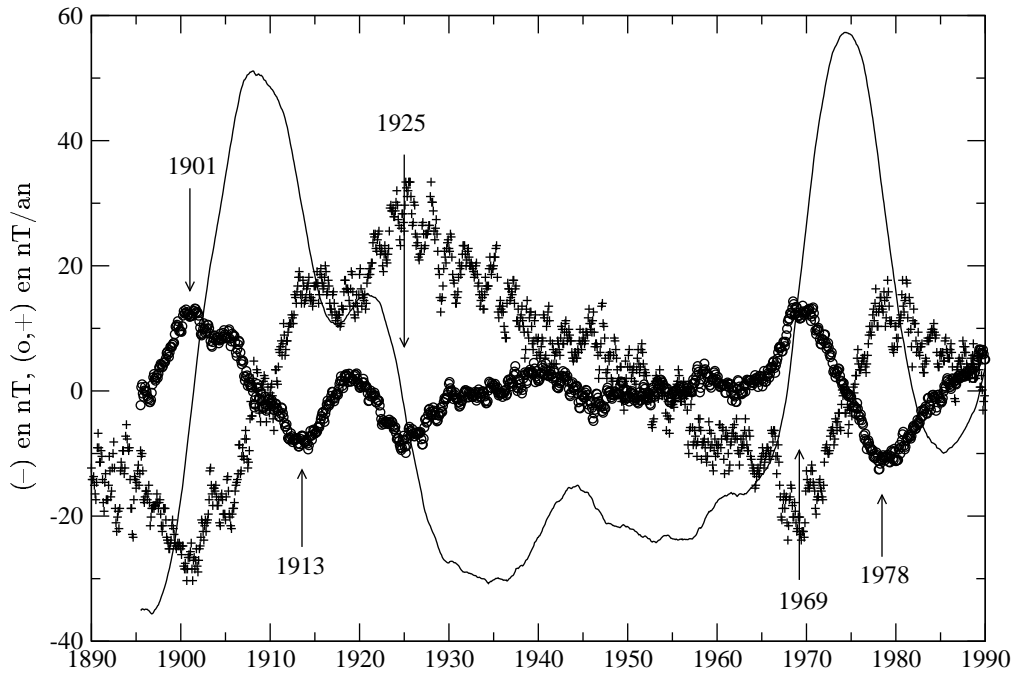


FIG. 2.16: Signal $RV_{3,22}(Y)$ à Chambon-La-Forêt (en trait plein, nT), sa dérivée temporelle (o, nT/an) et la variation séculaire de la composante Y à CLF (+, nT/an) shiftée de 40 nT/an vers le bas.

2.3 Conclusions

La transformée de Fourier a été utilisée sur les longues séries magnétiques. Cependant, son usage n'est pertinent que pour les séries dont la durée est de l'ordre de cinq fois la période du cycle recherché. Comme des cycles de grandes périodes étaient recherchés, la transformée de Fourier n'est pas l'outil pertinent pour des périodes de plus de 20 ans.

Des cycles de grandes périodes étaient recherchés en lien avec le mécanisme d'excitation des ondes de torsion présenté à la fin de ce manuscrit. En effet, quand un système est forcé à une fréquence donnée, il réagit à cette fréquence. C'est le cas du noyau, forcé par le cycle solaire via les systèmes de courant externes. Dans le cas où la période d'excitation est de 11 ans, un champ magnétique est induit par les ondes de torsion à la période de 11 ans ; lequel n'est plus corrélé avec le nombre de Wolf. Ce qui expliquerait les conclusions de Gavoret *et al.* [1986] qui ne réussirent pas à expliquer la signal à 11 ans comme une combinaison linéaire du nombre de Wolf et de l'indice *aa*. Gubbins et Tomlison [1986] arrivèrent à la même conclusion par une méthode différente. De plus, le mécanisme d'excitation est d'autant plus efficace que les périodes sont grandes, d'où l'intérêt de telles périodes.

Pour le cycle à 11 ans, les deux techniques employées sont complémentaires : la transformée de Fourier en donne une information intégrée sur toute la durée de la série, tandis que le filtrage par moyenne glissante donne une information sur la variation de l'amplitude du cycle au cours de la série. Il semble en effet que l'amplitude de ce cycle varie. Dans le même ordre d'idée, le cycle à 22 ans, est important entre 1900 et 1930, puis à de 1970. On peut remarquer

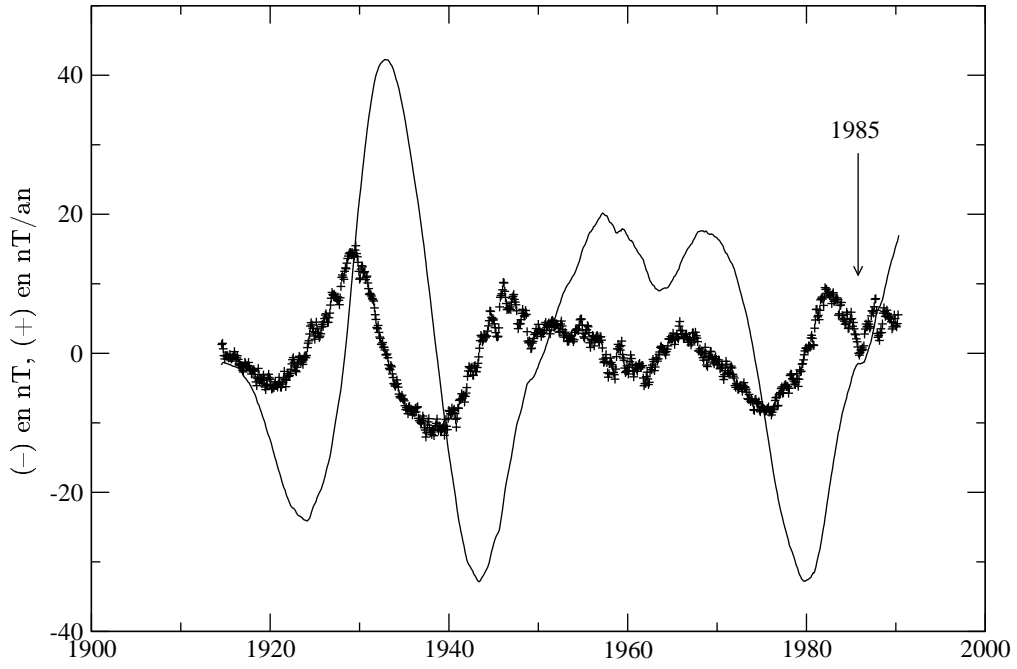


FIG. 2.17: Signal $RV_{3,22}(Y)$ à HON (en trait plein, nT), sa dérivée temporelle (+, nT/an).

la corrélation entre les secousses les plus marquées () sur la composante Y de la variation séculaire à Chambon-La-Forêt et l'amplitude du cycle à 22 ans.

Finalement, quand le cycle à 11 ans est bien identifiable par le filtrage par moyenne glissante, comme c'est le cas de la station magnétique SIT, on peut voir que l'amplitude du cycle sur la composante X est du même ordre de grandeur que celle de la composante Y.

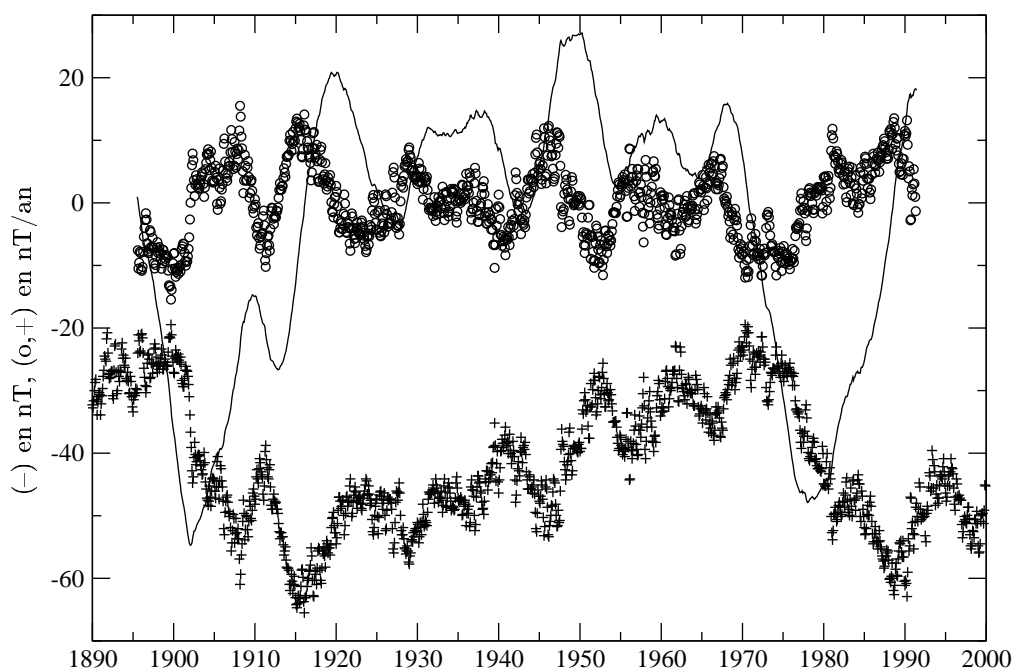


FIG. 2.18: Signal $RV_{3,22}(X)$ à Chambon-La-Forêt (en trait plein, nT), sa dérivée temporelle (o, nT/an) et la variation séculaire de la composante X à CLF (+, nT/an) décalée de 60 nT/an vers le bas.

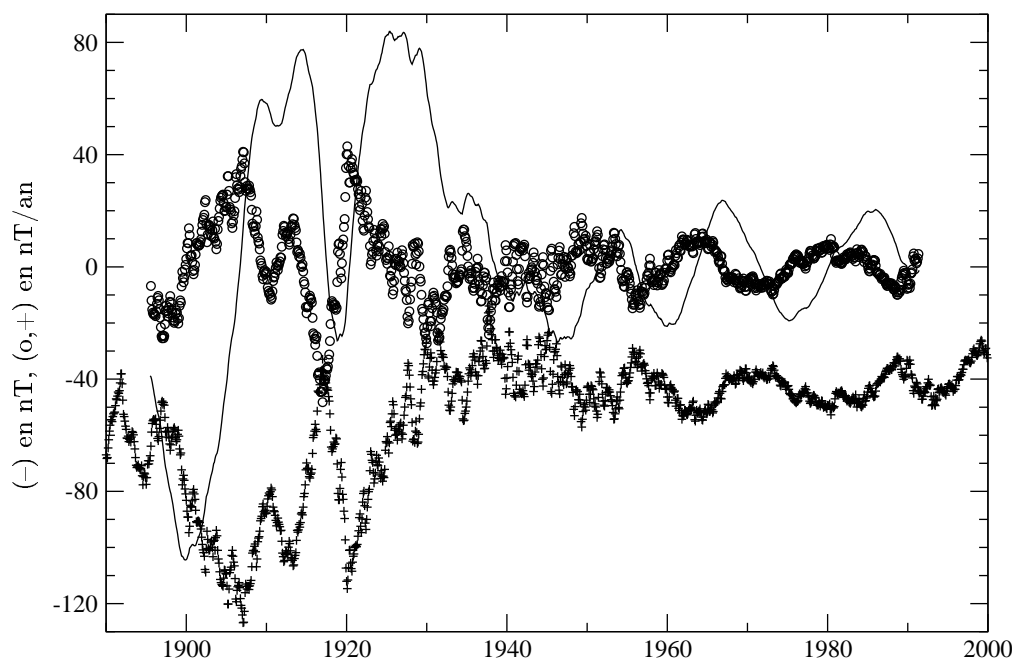


FIG. 2.19: Signal $RV_{3,22}(Z)$ à Chambon-La-Forêt (en trait plein, nT), sa dérivée temporelle (o, nT/an) et la variation séculaire de la composante X à CLF (+, nT/an) décalée de 60 nT/an vers le bas.

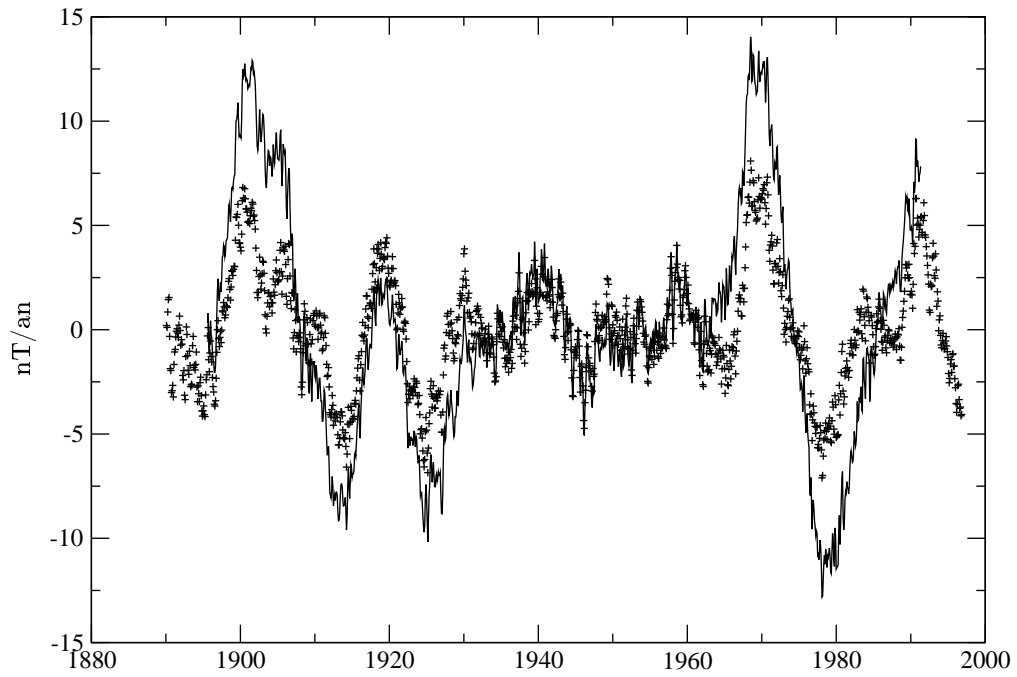


FIG. 2.20: Dérivées temporelles du signal $RV_{22,3}(Y)$ à Chambon-La-Forêt (en trait plein, nT/an) et du signal $RV_{11,3}(Y)$ (+, nT/an) à Chambon-La-Forêt.

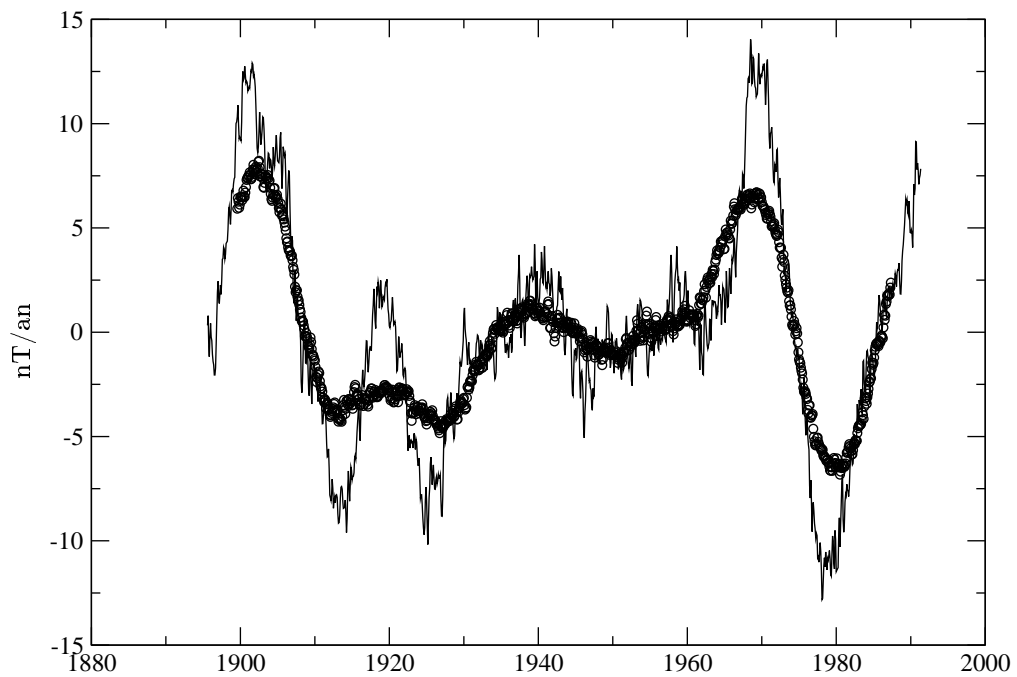


FIG. 2.21: Dérivées temporelles du signal $RV_{22,3}(Y)$ à Chambon-La-Forêt (en trait plein, nT/an) et du signal $RV_{22,11}(Y)$ (o, nT/an) à Chambon-La-Forêt.

Deuxième partie

Les Ondes de Torsion

Chapitre 3

Les équations du manteau et du noyau

3.1 Les équations de l'électromagnétisme

Les équations de Maxwell et la loi d'Ohm permettent de décrire l'évolution du champ magnétique en espace et en temps.

3.1.1 Les équations de Maxwell

Dans un milieu de perméabilité magnétique μ_0 et de permittivité ε_0 , les équations de Maxwell sont

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad (3.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{(a)} \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

avec \vec{E} et \vec{B} les composantes électrique et magnétique du champ électromagnétique et les densités volumiques de charges ρ_e et de courants \vec{j} . Les courants de déplacement (a) sont négligeables si

$$\left| \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| \ll \left| \operatorname{rot} \vec{B} \right| \sim \left| \mu_0 \vec{j} \right| \quad \text{soit} \quad c^2 \varepsilon_0 \mu_0 \ll T^2$$

c'est à dire si $T \gg 0.01$ secondes (c est le rayon du noyau et $(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ la vitesse de la lumière dans le vide). Les ondes les plus rapides que j'évoque dans cette thèse sont les ondes inertielles qui ont une période de l'ordre du jour. Les ondes qui font l'objet de ce travail, les ondes de torsion, se rencontrent sur des échelles de temps décennales. Les courants de déplacements sont donc négligés : c'est *l'approximation magnétohydrodynamique* dans le cadre de laquelle l'équation de Maxwell-Ampère se réduit à

$$\mathbf{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.6)$$

Dans le cadre de cette approximation, les courants sont à divergence nulle

$$\text{div} \vec{j} = 0 \quad (3.7)$$

ce qui traduit la conservation de la charge.

Les équations de Maxwell ne forment pas un système complet d'équations : il manque une relation de fermeture, qui couple les courants, le champ électrique et le champ magnétique : la loi empirique d'Ohm.

3.1.2 La loi d'Ohm

Les courants électriques \vec{j} sont reliés au champ électromagnétique via la conductivité σ du fluide par la loi d'Ohm. Dans le cas d'un référentiel non galiléen, cette dernière s'écrit

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} \right) \quad (3.8)$$

Dans les équations vues ci-dessus, on peut éliminer le champ électrique. La première raison à cette élimination est mathématique : utiliser le champ électrique impose de connaître les charges dans le noyau ($\rho_e = -\varepsilon_0 \text{div}(\vec{u} \wedge \vec{B})$) et d'inverser alors la divergence du champ électrique. Deuxièmement, on préfère utiliser la description en terme de courants électriques qui ont une réalité physique immédiate et utiliser le champ magnétique qu'on mesure directement dans les observatoires et les satellites. A partir des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm, cette élimination conduit à l'équation d'induction

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathbf{rot} \left(\vec{u} \wedge \vec{B} \right) + \mathbf{rot}(\eta \mathbf{rot} \vec{B}) \quad (3.9)$$

où la conductivité σ est supposée ne pas être uniforme. La diffusivité magnétique $\eta = (\mu_0\sigma)^{-1}$ est donc a priori non uniforme. Pour le manteau, où il n'y a pas de vitesse, elle devient

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\eta \mathbf{rot} \vec{B}) \quad (3.10)$$

Dans le noyau, les ondes de torsion ont une période caractéristique maximale de l'ordre de la centaine d'années négligeable devant le temps de diffusion magnétique T_d (1.7) ; l'équation de diffusion (3.9) se réduit à

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathbf{rot} \left(\vec{u} \wedge \vec{B} \right) \quad (3.11)$$

en dehors des couches limites et de la graine solide où il n'y a pas de vitesse.

3.2 Cas du manteau isolant

Dans le but de connaître le comportement du champ magnétique dans le manteau, on considère le cas du manteau isolant. Cela permet, en outre, de prolonger les observations en surface vers le coeur de notre planète. Comme le manteau est isolant, il n'y a pas de courants électriques :

$$\mathbf{rot} \vec{B} = \vec{0}$$

D'après l'équation (D.5), le champ toroïdal est nul dans le manteau et d'après l'expression (D.4), le champ poloïdal est une fonction harmonique dans le manteau ($\Delta P = 0$). Si le manteau est isolant, seule la partie poloïdale contribue au champ magnétique (cf Eq. (D.3)). On note ψ le potentiel magnétique dans le manteau. On a alors

$$\vec{B} = \mathbf{grad} \left(\frac{\partial}{\partial r}(rP) \right) = -\mathbf{grad} \psi \quad (3.12)$$

Le potentiel magnétique est donc relié au champ poloïdal dans le manteau

$$\psi = -\frac{\partial}{\partial r}(rP) \quad (3.13)$$

Comme le champ magnétique est à divergence nulle, le potentiel est aussi une fonction harmonique dans le manteau

$$\Delta \psi = 0 \quad (3.14)$$

C'est grâce à cette propriété du potentiel magnétique qu'on peut prolonger les observations magnétiques de la surface de la Terre jusqu'à la frontière noyau-manteau. Pour exprimer facilement le poloïdal P dans le manteau, on revient sur le caractère harmonique de P dans le manteau. En considérant la relation (D.6) et sa propriété (D.7), on peut montrer que

$$\Delta P = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} L^2 P \quad \Rightarrow \quad \ll \psi = lP \gg \quad (3.15)$$

Le poloïdal P s'écrit alors dans le manteau

$$P = a \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \left[\frac{g_l^m}{l} \cos(m\phi) + \frac{h_l^m}{l} \sin(m\phi) \right] P_l^m(\cos \theta) \quad (3.16)$$

Le potentiel magnétique est couplé au poloïdal dans le manteau par les deux équations (3.13) et (3.15). Le poloïdal vérifie donc partout dans le manteau, et en particulier à la frontière noyau-manteau

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{l+1}{r} P \quad (3.17)$$

3.3 Cas du manteau conducteur

Dans cette partie, je reviens sur l'approximation précédente de manteau isolant. Le but de cette partie est de prendre en compte la conductivité du manteau en vue de déterminer la réponse électromagnétique de la Terre à une excitation externe et/ou déterminer la contribution des ondes de torsion dans les observatoires à la surface de la Terre.

3.3.1 Equation de l'induction pour un manteau conducteur

Dans le cas d'une conductivité non uniforme, l'équation de l'induction dans le manteau est l'équation (3.10). En utilisant la décomposition toroïdale/poloïdale (cf Eq. (D.1)), elle s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \vec{r} \right) + \mathbf{rot} \mathbf{rot} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \vec{r} \right) = \mathbf{rot} \left\{ \mathbf{grad} \left(\eta \frac{\partial}{\partial r} (rT) \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial r} (rT) \mathbf{grad} \eta + \eta \Delta T \vec{r} + \mathbf{rot}(\eta \Delta P) - \mathbf{grad} \eta \wedge (\Delta P \vec{r}) \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dans ce travail, la partie toroïdale du champ magnétique n'a pas été prise en compte pour les ondes de torsion, il n'est donc pas nécessaire de la prendre en compte dans le manteau. Un moyen de découpler les parties toroïdale/poloïdale du champ magnétique dans le manteau est de choisir une conductivité qui ne dépende que du rayon sphérique r . Dans ce cas, les équations découplées sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \eta(r) \Delta P \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \eta(r) \Delta T + \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial}{\partial r} (rT) \end{aligned} \quad (3.19)$$

On choisit une conductivité constante par morceaux à l'intérieur de coquilles concentriques pour simplifier la mise en équation du problème. Comme une mise en équation matricielle sera développée par la suite, il sera possible de considérer un grand nombre de couches dans le manteau pour tendre vers une distribution continue de conductivité dans le manteau.

On cherche donc une solution à l'équation (3.19) de diffusion du poloïdal dans le manteau sous la forme

$$P = a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l x_l(r) e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) e^{i\omega t} \quad (3.20)$$

La fonction radiale $x_l(r)$ satisfait l'équation différentielle

$$r^2 \frac{d^2 x_l}{dr^2} + 2r \frac{dx_l}{dr} + (k^2 r^2 - l(l+1)) x_l = 0 \quad (3.21)$$

où $k^2 = -i\omega\mu_0\sigma$ est une constante complexe. La solution (cf Eq. (C.1)) est la combinaison linéaire suivante

$$x_l(r) = \gamma j_l(kr) + \delta n_l(kr) \quad (3.22)$$

où $j_l(kr)$ et $n_l(kr)$ sont les fonctions de Bessel sphériques respectivement de première et seconde espèce (ces dernières ayant la caractéristique de diverger en $r = 0$).

On peut écrire k sous la forme

$$k = \frac{1-i}{\delta_p} \quad \text{avec} \quad \delta_p = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} = \sqrt{\frac{\eta T}{\pi}} \quad (3.23)$$

où T est la période de l'excitation et δ_p la distance caractéristique, dite *épaisseur de peau*, sur laquelle le champ magnétique va pénétrer dans la couche conductrice. Si le terme $\mathbf{rot}(\vec{u} \wedge \vec{B})$ est négligeable devant le terme de diffusion du champ magnétique dans l'équation d'induction (3.9), alors le champ magnétique pénètre par diffusion dans le noyau sur une distance typique $\delta_p = 10.5 \text{ km}$ pour $\eta = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ et $T = 11 \text{ ans}$.

Dans une couche de conductivité σ_i , le poloïdal P est donc de la forme

$$P = a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[{}_i\gamma_l^m(\omega) j_l(k_i r) + {}_i\delta_l^m(\omega) n_l(k_i r) \right] e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) e^{i\omega t} \quad (3.24)$$

Les coefficients ${}_i\gamma_l^m$ et ${}_i\delta_l^m$ ont la convention suivante : l'indice i désigne la couche, les indices l et m , respectivement le degré et l'ordre des fonctions associées de Legendre. Ils dépendent de la fréquence étudiée. Les composantes du champ magnétique dans cette couche sont (cf Eq. (D.10) et Eq. (D.11))

$$B_r = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l l(l+1) \frac{a}{r} \left[{}_i\gamma_l^m j_l(k_i r) + {}_i\delta_l^m n_l(k_i r) \right] e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) e^{i\omega t} \quad (3.25)$$

$$B_{\theta} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{a}{r} \frac{d}{dr} \left(r \left[{}_i\gamma_l^m j_l(k_i r) + {}_i\delta_l^m n_l(k_i r) \right] \right) e^{im\phi} \frac{dP_l^m}{d\theta} e^{i\omega t} \quad (3.26)$$

3.3.2 Champ magnétique inducteur

On peut écrire le développement en harmoniques sphériques (1.2) du potentiel magnétique ψ sous la forme suivante

$$\psi(r, \theta, \phi) = a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\varepsilon_l^m(\omega) \left(\frac{r}{a} \right)^l + i_l^m(\omega) \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) e^{i\omega t} \quad (3.27)$$

La partie inductrice du champ magnétique, dont les sources sont externes, est donnée par les coefficients $\varepsilon_l^m(\omega)$, tandis que la partie induite, dont les sources sont les courants induits dans les couches conductrices du manteau et/ou les ondes de torsion dans le noyau, est donnée par les coefficients $i_l^m(\omega)$. Ces coefficients sont complexes. Cette écriture du potentiel n'est valable que dans un milieu isolant.

La partie réelle du développement (3.27) doit être égale au développement (1.2). Ce qui donne la correspondance entre les coefficients ε_l^m et $\{q_l^m, s_l^m\}$

$$m > 0 \quad \varepsilon_l^m = \frac{1}{2}(q_l^m - i s_l^m) \quad \varepsilon_l^{-m} = \frac{1}{2}(q_l^m + i s_l^m) \quad (3.28)$$

$$q_l^m = \varepsilon_l^m + \varepsilon_l^{-m} \quad s_l^m = i(\varepsilon_l^m - \varepsilon_l^{-m}) \quad (3.29)$$

$$m = 0 \quad \varepsilon_l^0 = q_l^0 \quad s_l^0 = 0 \quad (3.30)$$

Les mêmes relations s'appliquent aux coefficients i_l^m et $\{g_l^m, h_l^m\}$.

Les composantes radiale et orthoradiale du champ magnétique sont

$$B_r = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[-l \varepsilon_l^m \left(\frac{r}{a} \right)^{l-1} + (l+1) i_l^m \left(\frac{a}{r} \right)^{l+2} \right] e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) e^{i\omega t} \quad (3.31)$$

$$B_\theta = - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\varepsilon_l^m \left(\frac{r}{a} \right)^{l-1} + i_l^m \left(\frac{a}{r} \right)^{l+2} \right] e^{im\phi} \frac{dP_l^m}{d\theta} e^{i\omega t} \quad (3.32)$$

3.3.3 Champ magnétique d'origine interne

Connaissant le champ inducteur externe – donné par les coefficients $\varepsilon_l^m(\omega)$ – et le profil de conductivité du manteau, on se propose de déterminer le champ d'origine interne – c'est à dire les coefficients $i_l^m(\omega)$.

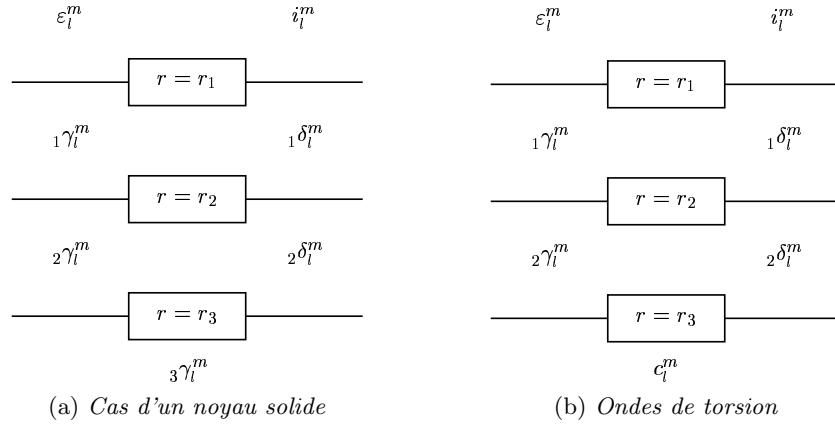


FIG. 3.1: Modèle de conductivité. Les mouvements dans le noyau sont négligés (a) ou non (b).

Le modèle générique de conductivité adopté, présenté Fig. 3.1, comporte une interface entre le milieu isolant et la première couche conductrice, une interface entre les couches conductrices (qui est l'interface générique si on veut mettre des couches conductrices supplémentaires dans le modèle) et enfin, une interface entre la dernière couche conductrice et le noyau.

A chaque interface, on écrit la continuité des composantes radiale et orthoradiale du champ magnétique. Pour la première interface, en $r = r_1$, on obtient, en notation matricielle,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l^m \\ i_l^m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} {}_1\gamma_l^m \\ {}_1\delta_l^m \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{a}{r_1}\right)^l \frac{l+1}{2l+1} k_1 r_1 j_{l-1}(k_1 r_1) & -\left(\frac{a}{r_1}\right)^l \frac{l+1}{2l+1} k_1 r_1 n_{l-1}(k_1 r_1) \\ \left(\frac{r_1}{a}\right)^{l+1} \frac{l}{2l+1} k_1 r_1 j_{l+1}(k_1 r_1) & \left(\frac{r_1}{a}\right)^{l+1} \frac{l}{2l+1} k_1 r_1 n_{l+1}(k_1 r_1) \end{bmatrix}$$

La deuxième interface, en $r = r_2$, est caractérisée par

$$\begin{bmatrix} {}_1\gamma_l^m \\ {}_1\delta_l^m \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} {}_2\gamma_l^m \\ {}_2\delta_l^m \end{bmatrix}$$

$$B = -k_1 r_2 \begin{bmatrix} k_1 r_2 n_{l-1}(k_1 r_2) j_l(k_2 r_2) & k_1 r_2 n_{l-1}(k_1 r_2) n_l(k_2 r_2) \\ -k_2 r_2 j_{l-1}(k_2 r_2) n_l(k_1 r_2) & -k_2 r_2 n_{l-1}(k_2 r_2) n_l(k_1 r_2) \\ -k_1 r_2 j_{l-1}(k_1 r_2) j_l(k_2 r_2) & -k_1 r_2 j_{l-1}(k_1 r_2) n_l(k_2 r_2) \\ +k_2 r_2 j_{l-1}(k_2 r_2) j_l(k_1 r_2) & +k_2 r_2 n_{l-1}(k_2 r_2) j_l(k_1 r_2) \end{bmatrix}$$

Enfin, à la dernière interface, il y a plusieurs choix possibles, lesquels sont présentés sur la Fig. 3.1. On peut considérer le noyau solide, comme c'est fait dans les calculs de réponse électromagnétique de la Terre – détermination de la réponse Q ou C – ou on peut tenir compte des différents processus à l'oeuvre dans le noyau, comme les ondes de torsion, la diffusion qui pourrait être turbulente, le processus dynamo, les ondes MAC ...

Cas d'un noyau solide

Dans ce cas, la dernière interface est caractérisée par

$$\begin{bmatrix} {}_2\gamma_l^m \\ {}_2\delta_l^m \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} {}_3\gamma_l^m \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = -k_2 r_3 \begin{bmatrix} k_2 r_3 n_{l-1}(k_2 r_3) j_l(k_3 r_3) & k_2 r_3 n_{l-1}(k_2 r_3) n_l(k_3 r_3) \\ -k_3 r_3 j_{l-1}(k_3 r_3) n_l(k_2 r_3) & -k_3 r_3 n_{l-1}(k_3 r_3) n_l(k_2 r_3) \\ -k_2 r_3 j_{l-1}(k_2 r_3) j_l(k_3 r_3) & -k_2 r_3 j_{l-1}(k_2 r_3) n_l(k_3 r_3) \\ +k_3 r_3 j_{l-1}(k_3 r_3) j_l(k_2 r_3) & +k_3 r_3 n_{l-1}(k_3 r_3) j_l(k_2 r_3) \end{bmatrix}$$

Le coefficient ${}_3\delta_l^m$ est nul, car la fonction de Bessel de deuxième espèce – $n_l(k_3 r)$ – diverge à l'origine.

Si le produit des matrices A , B et C est noté E , la réponse Q , qui ne dépend que du degré l et non de l'ordre des harmoniques sphériques, est

$$Q_l = \frac{e_{21}}{e_{11}}$$

et la réponse C est déterminée grâce à la relation (1.4). Les calculs de la réponse Q ou de la réponse C pour le cycle à 11 ans [Harwood et Malin, 1977; Olsen, 1999] n'ont pris en compte que le manteau, laissant de côté le noyau. La seule tentative est dû à Duhau et Martinez [1995]. La prise en compte du noyau est abordée après quelques dernières considérations sur le noyau solide.

Courants induits dans le noyau par diffusion

On peut facilement déterminer les courants associés à ce champ dans le noyau. De manière évidente, $j_r = 0$. Le calcul donne

$$(\mathbf{rot} \vec{B})_\theta = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a k_3^2 {}_3\gamma_l^m j_l(k_3 r) i m e^{i m \phi} \frac{P_l^m}{\sin \theta} e^{i \omega t}$$

$$(\mathbf{rot} \vec{B})_\phi = - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a k_3^2 {}_3\gamma_l^m j_l(k_3 r) e^{i m \phi} \frac{dP_l^m}{d\theta} e^{i \omega t}$$

Si le champ magnétique externe est axisymétrique, alors $j_\theta = 0$. Dans ce cas, les courants induits dans le noyau sont zonaux. On peut déterminer les courants associés au degré $l = 1$. On suppose, pour simplifier le calcul que le manteau est isolant. S'il n'y a pas de couches conductrices dans le manteau, la relation (3.33) se réduit à

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ i_1^0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \gamma_1^0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On en déduit que

$$\mu_0 j_\phi = - \frac{3}{2} \varepsilon_1^0 k_3 \frac{j_1(k_3 r)}{j_0(k_3 c)} \sin \theta$$

Les courants tendent bien à s'annuler quand $r \rightarrow 0$. Dans le cas où $\|k_3\|c \gg 1$ (forte conductivité) et $\|k_3\|r \gg 1$ (ce qui n'est valable que proche de la frontière noyau-manteau), on peut utiliser l'approximation (C.9)

$$\mu_0 j_\phi = \frac{3}{2} \varepsilon_1^0 \frac{c}{r} \frac{e^{-(c-r)/\delta_p}}{\delta_p} (1 - i) (\sin[(c-r)/\delta_p] + i \cos[(c-r)/\delta_p]) \sin \theta$$

Ces courants sont nuls aux pôles, et maximum à l'équateur. Leur enveloppe se comporte comme

$$\frac{\varepsilon_1^0}{\delta_p} e^{-(c-r)/\delta_p} \sin \theta \quad (3.34)$$

Champ magnétique transmis au noyau par diffusion

Dans le cadre de l'approximation ci-dessus ($l = 1, m = 0$), le champ transmis dans le noyau par diffusion, ramené au champ exciteur, est proportionnel à

$$\frac{\gamma_1^0}{\varepsilon_1^0} j_1(k_3 r) = - \frac{3}{2} \frac{1}{ka} \frac{j_1(k_3 r)}{j_0(k_3 c)} \quad (3.35)$$

La Fig. 3.2 montre le comportement aux abords immédiats de la frontière noyau-manteau, de la quantité (3.35), pour deux conductivités différentes du noyau. Le champ transmis dans le noyau se met à l'échelle comme $\sqrt{\sigma_c}$.

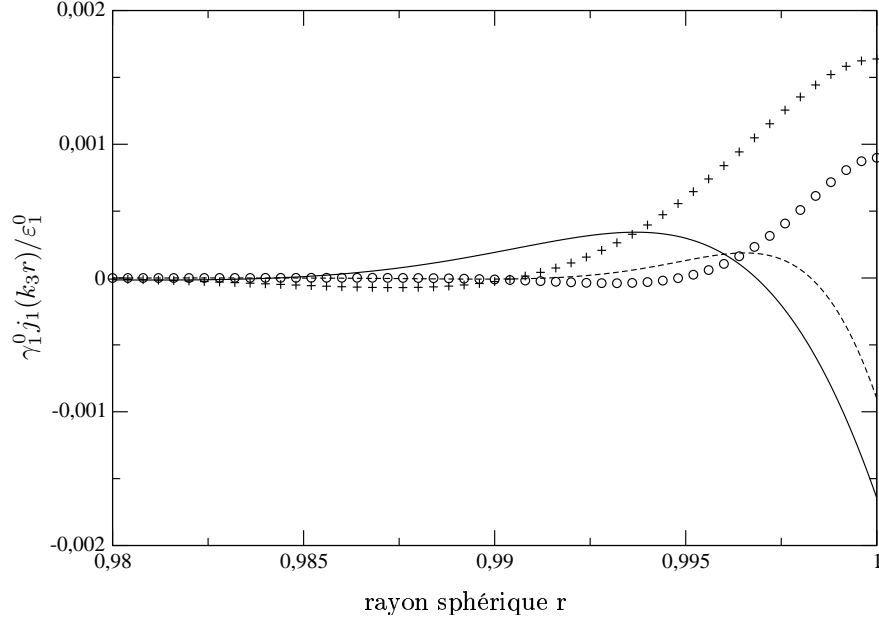


FIG. 3.2: Quantité (3.35) en fonction du rayon sphérique r . Partie réelle (trait plein) et imaginaire (+) pour $\sigma_c = 4.46 \cdot 10^5$ S. Partie réelle (pointillé) et imaginaire (o) pour $\sigma_c = 1.48 \cdot 10^6$ S.

Cas d'un noyau fluide

Dans un noyau fluide, l'approximation (3.10) de l'équation de l'induction valable dans le manteau n'est plus correcte. On revient alors à la forme générale (3.9) qu'il faut résoudre dans le noyau pour pouvoir écrire la continuité de la composante radiale du champ magnétique à la frontière noyau-manteau : cela permet de prendre en compte tous les phénomènes voulus comme la diffusion magnétique, le processus dynamo, les différentes ondes possibles ...

Dans le cas du code IMPULse, la diffusion et les ondes de torsion sont prises en compte. La composante radiale du champ magnétique obtenue est

$$b_r = \sum_{l=1}^{l^\emptyset} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{2l+1}{2}} c_l^m(\omega) e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) e^{i\omega t}$$

où l^\emptyset est le degré de troncature du développement.

Le code IMPULse fournit la réponse impulsionnelle des coefficients c_l^m qu'il faut convoluer avec une sinusoïde pour obtenir le coefficient $c_l^m(\omega)$, c'est à dire l'amplitude spectrale de la sinusoïde résultante de la convolution.

La continuité de la composante radiale à la frontière noyau-manteau permet alors d'écrire une relation entre les coefficients de la dernière couche conductrice et le champ induit dans le noyau par les ondes

$${}_2\delta_l^m(\omega) = \alpha_l c_l^m(\omega) - \beta_l {}_2\gamma_l^m(\omega) \quad (3.36)$$

avec les coefficients

$$\alpha_l = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \frac{1}{l(l+1)} \frac{r_3}{a} \frac{1}{n_l(k_2 r_3)}$$

$$\beta_l = \frac{j_l(k_2 r_3)}{n_l(k_2 r_3)}$$

En notant $D = A * B$, le produit des matrices A et B , les coefficients de la couche isolante sont reliés aux coefficients de la dernière couche conductrice et du noyau par

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l^m \\ i_l^m \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} {}_2\gamma_l^m \\ \alpha_l c_l^m - \beta_l {}_2\gamma_l^m \end{bmatrix}$$

Les éléments d_{ij} de la matrice D permettent finalement d'éliminer la dernière inconnue (le coefficient ${}_2\gamma_l^m$). Le champ d'origine interne

$$i_l^m(\omega) = \left(\frac{d_{21} - \beta_l d_{22}}{d_{11} - \beta_l d_{12}} \right) \varepsilon_l^m(\omega) + \left[d_{22} - d_{12} \left(\frac{d_{21} - \beta_l d_{22}}{d_{11} - \beta_l d_{12}} \right) \right] \alpha_l c_l^m(\omega) \quad (3.37)$$

est une combinaison linéaire entre, d'une part, les courants induits dans le manteau conducteur par le champ externe (ε_l^m), et d'autre part, le champ induit par les ondes de torsion (c_l^m), lequel crée aussi des courants dans le manteau conducteur.

Une fois choisi un profil de conductivité pour le manteau, la matrice D et les coefficients α_l et β_l sont fixés. Connaissant le champ magnétique externe, les coefficients ε_l^m sont calculés à partir des coefficients q_l^m et s_l^m par les relations (3.28). Un exemple est donné Tab. (6.3). Si le développement en harmoniques sphériques du champ magnétique du noyau est connu à la surface du noyau (coefficients c_l^m), on peut alors déterminer le champ magnétique induit à la surface de la Terre (coefficients i_l^m). Dans le Tab. (6.6), on obtient les coefficients $g_{l,c}^m$ et $h_{l,c}^m$ à partir des coefficients c_l^m via la relation (3.29). De même, les coefficients g_l^m et h_l^m sont associés aux coefficients i_l^m .

Si on prend en compte le caractère fluide du noyau dans le calcul de la réponse électromagnétique de la Terre à l'excitation de l'anneau de courant magnétosphérique, la partie temporelle de la phase du champ induit ne peut plus être supposée en quadrature de phase avec celle du champ inducteur, comme cela avait été exploité par exemple dans [Harwood et Malin, 1977].

Le caractère fluide du noyau a été abordé de manière indirecte : je continue en décrivant les équations qui gèrent l'évolution de la vitesse apparue dans la loi d'Ohm.

3.4 Les équations de la mécanique des fluides

Je note \mathcal{G} un référentiel galiléen et \mathcal{R} un référentiel en rotation autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire qui peut varier au cours du temps $\Omega(t)$. Dans \mathcal{G} , le rayon vecteur est noté \vec{r} et la vitesse d'une particule de fluide \vec{u} .

A cause de l'analogie qu'il y a entre la convection thermique et la convection solutale (flux de chaleur \leftrightarrow flux d'éléments légers), je me restreins à la convection thermique.

De plus, parler de convection revient à prendre en compte certains effets de compressibilité du fluide puisque le moteur de la convection est la force d'Archimède. Cela va nous conduire à détailler l'approximation anélastique et l'approximation de Boussinesq qui permettent de qualifier ces *effets de compressibilité* du fluide.

Pour décrire la convection et les ondes de torsion, on considère le noyau dans un état de référence hydrostatique et isotrope. Les coordonnées sphériques sont utilisées. La pression p est décomposée en une partie hydrostatique $p_{\text{ref}}(r)$ et en une perturbation de l'état de référence $p_1(r, \theta, \phi, t)$. La même décomposition est applicable à la densité ρ

$$\begin{aligned} p(r, \theta, \phi, t) &= p_{\text{ref}}(r) + p_1(r, \theta, \phi, t) \\ \rho(r, \theta, \phi, t) &= \rho_{\text{ref}}(r) + \rho_1(r, \theta, \phi, t) \end{aligned}$$

On suppose aussi que toutes perturbations de l'état de référence se font de manière isentropique.

3.4.1 La conservation de la masse

La conservation de la masse se traduit par les relations équivalentes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{u} = 0 \quad (3.38)$$

où la dérivée particulaire est définie par

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \mathbf{grad})\rho$$

On peut linéariser ces relations autour de l'état de référence ; au premier ordre en ρ_1 et \vec{u} , la première des relations (3.38) devient

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_{\text{ref}} \vec{u}) = 0 \quad (3.39)$$

Si on ne prend pas en compte la chimie du noyau, la pression p est a priori fonction seulement de deux variables d'état (par exemple la densité ρ et l'entropie s du fluide) dont la différentielle s'écrit

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds \quad (3.40)$$

Si on suppose l'écoulement isentropique, la pression et la densité sont reliées par

$$dp = c_{\text{son}}^2 d\rho \quad (3.41)$$

avec c_{son} la vitesse du son dans le fluide, définit par

$$c_{\text{son}}^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

La relation (3.39) devient

$$\underbrace{\frac{1}{c_{\text{son}}^2} \frac{\partial p_1}{\partial t}}_{\frac{U}{L} \frac{\rho^* U^2}{c_{\text{son}}^2}} + \underbrace{\text{div}(\rho_{\text{ref}} \vec{u})}_{\frac{\rho^* U}{L}} = 0 \quad (3.42)$$

Pour comparer les deux termes de cette équation, on a noté U la vitesse caractéristique du fluide, L la longueur caractéristique et ρ^* une densité caractéristique. La pression dynamique p_1 est évaluée par $\rho^* U^2$. Le rapport des deux termes est alors

$$M^2 = \frac{U^2}{c_{\text{son}}^2}$$

M est appelé le nombre de Mach. La vitesse du son dans le noyau est de l'ordre de 9 km.s^{-1} [Dziewonski et Anderson, 1981]. La vitesse U est évaluée à partir des valeurs de l'amplitude de la dérive vers l'ouest : elle est moyennée sur des intervalles de temps d'au moins quelques années. La première estimation est de 0.18 degré/an [Bullard *et al.*, 1950]. La vitesse U est alors de l'ordre de 18 km/an . On peut trouver une estimation de ce paramètre pour les deux milles dernières années (de 0.30 à 0.60 degré/an) dans [McFadden *et al.*, 1985]. On obtient

$$M^2 \simeq 10^{-14}$$

On néglige donc les variations de densité engendrées par les variations de pression (ondes sonores) : c'est l'*approximation anélastique* dans laquelle on a donc

$$\text{div}[\rho_{\text{ref}} \vec{u}] \simeq 0 \quad (3.43)$$

L'équilibre hydrostatique de référence, qui s'écrit

$$\frac{dp_{\text{ref}}}{dr} = -\rho_{\text{ref}}(r)g(r) \quad (3.44)$$

peut être intégré en utilisant la relation (3.41) pour obtenir le profil radial moyen de densité du noyau

$$\rho_{\text{ref}}(r) = \rho_0 \exp \left(- \int_0^r \frac{g(r')}{c_{\text{son}}^2(r')} dr' \right)$$

où ρ_0 est une constante. Dans un modèle simple, on peut considérer le champ de gravité uniforme, ainsi que la vitesse du son ; le profil de densité, qui devient

$$\rho_{\text{ref}}(r) = \rho_0 e^{-r/H}$$

varie significativement sur la distance caractéristique

$$H = \frac{c_{\text{son}}^2}{g}$$

Si on considère une couche de fluide de hauteur h petite devant H , alors $\rho_{\text{ref}}(r) \simeq \rho_0$ et la relation (3.43) devient

$$\text{div} \vec{u} \simeq 0 \quad (3.45)$$

A partir du modèle PREM [Dziewonski et Anderson, 1981], on peut grossièrement évaluer

$$H \simeq 8000 \text{ km}$$

Dans un meilleur modèle physique [Labrosse, 2003], la distance caractéristique sur laquelle le profil de densité hydrostatique varie est $H = 7400 \text{ km}$; comme quoi les variations du champ de pesanteur avec la profondeur ne sont pas très importantes. Dans le cas du noyau, puisque le rayon du noyau n'est pas grand devant cette hauteur H , on ne peut vraisemblablement pas négliger les variations de densité dans l'équation de conservation de la masse.

On appelle *approximation de Boussinesq* l'ensemble des conditions suivantes [Boussinesq, 1903; Spiegel et Veronis, 1960]

1. état de référence en équilibre hydrostatique et isentropique
2. approximation anélastique
3. une hauteur de fluide petite devant la distance caractéristique de variation de la densité hydrostatique ($h \ll H$)
4. les variations de densité ne sont importantes que dans le terme de flottaison (Archimède) de l'équation de Navier-Stokes

Les ondes de torsion seront étudiées dans le cadre de l'approximation de Boussinesq pour simplifier les calculs.

Avant de déterminer l'équation de Navier-Stokes pour le noyau, on peut détailler une condition nécessaire pour que le noyau soit dans un état convectif.

3.4.2 Gradient adiabatique

Toujours en négligeant la chimie, on peut exprimer l'entropie S du noyau en fonction de deux variables d'état, la pression P et la température T

$$dS = \frac{C_p}{T} dT - \frac{\alpha}{\rho} dP$$

où α est le coefficient de dilatation thermique et C_p la capacité calorifique à pression constante. Si on suppose que la convection brasse bien le fluide dans le noyau, souvent en invoquant un noyau très turbulent, le noyau est alors proche d'un état isentropique. Lequel, couplé à l'équilibre hydrostatique (3.44), définit le gradient de température adiabatique dans le noyau

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{adia}} = -\frac{g(r)\alpha}{C_p} T_{\text{adia}}$$

auquel est associé un flux de chaleur (loi de Fourier, 1807)

$$q_{\text{adia}} = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{adia}}$$

Le noyau évacue donc de la chaleur par conduction le long du gradient adiabatique de température. Une condition nécessaire pour que le noyau soit dans un état convectif est que le flux de chaleur effectif q soit supérieur au flux de chaleur adiabatique

$$q > q_{\text{adia}}$$

au moins dans une partie du noyau. C'est le critère de l'instabilité convective.

Cet effet de compression - dilatation thermique est complètement ignoré par l'approximation de Boussinesq. Seule la partie sur-adiabatique de la chaleur participe à la poussée d'Archimède (3.48).

Une autre façon de faire aurait été d'introduire la température potentielle Θ définie comme l'écart de température au profil adiabatique

$$\Theta = T - T_{\text{adia}}$$

et de l'utiliser pour écrire les équations de la convection. L'avantage d'une telle écriture est que le fluide peut alors être décrit par une équation de type incompressible.

3.4.3 Equation de Navier-Stokes

L'accélération d'une particule de fluide dans le référentiel galiléen \mathcal{G} s'exprime en fonction de l'accélération de cette particule de fluide dans le référentiel en rotation \mathcal{R} de la façon suivante

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{G}} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + 2\vec{\Omega} \wedge (\vec{u})_{\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$$

le dernier terme dérivant d'un potentiel

$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{grad}(\vec{\Omega} \wedge \vec{r})^2 \quad (3.46)$$

L'équation de Navier-Stokes décrit comment les forces en présence modifient l'accélération d'une particule de fluide dans le référentiel galiléen \mathcal{G} :

$$\rho \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{\mathcal{G}} = \text{somme des forces}$$

Les forces de pression sont

$$\vec{F}_{\text{pression}} = -\mathbf{grad} p$$

à laquelle s'ajoute les forces volumiques de Lorentz, d'Archimède et de diffusion. La force de Lorentz s'exprime en fonction des courants \vec{j} et du champ magnétique \vec{B}

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

La force de diffusion est alors, en supposant le fluide newtonien,

$$\vec{F}_{\text{diffusion}} = \nu \Delta \vec{u}$$

La viscosité dynamique ν s'exprime en fonction de la viscosité cinématique ν_* et de la densité ρ ($\eta = \nu/\rho$). On trouve dans [de Wijs *et al.*, 1998; Vočadlo *et al.*, 2003] une estimation de l'ordre de $\nu_* = 1.5 \cdot 10^{-2}$ Pa.s et une densité de l'ordre de $\rho = 10^4$ kg.m⁻³ [Dziewonski et Anderson, 1981] soit $\nu \simeq 10^{-6}$ m².s⁻¹.

Si U et L sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques du fluide, le rapport entre la force visqueuse et le terme d'inertie est

$$\frac{\nu}{UL} \simeq 3 \cdot 10^{-9}$$

en prenant la valeur de U utilisée précédemment (10^{-4} m.s⁻¹) et une distance caractéristique égale au rayon du noyau, soit 3500 km. Il n'est pas évident de choisir la bonne longueur : il y a en effet les longueurs mesurées, telle la taille du noyau, et puis il y a les longueurs déterminées par l'équilibre des forces en présence, au moins dans les systèmes en rotation rapide. J'ai opté pour le rayon du noyau, bien que rigoureusement, j'aurais dû prendre la longueur qui a un sens physique, mais qui n'est pas évidente. Un exemple d'une telle longueur peut être trouvé dans [Starchenko et Jones, 2002, leur longueur r_*].

Comparée à l'inertie, la diffusion est donc négligée en volume aux grandes échelles. D'habitude, on compare la force visqueuse à la force de Coriolis (via le nombre d'Ekman). Cependant, comme on le verra plus tard, la force de Coriolis n'intervient pas pour les ondes de torsion, bien qu'elle assure la contrainte de Proudman-Taylor (voir section 3.6.1).

Comme le fluide est conducteur, il faut prendre en compte la force de Coulomb

$$\vec{F}_{\text{Coulomb}} = \rho_e \vec{E}$$

où ρ_e désigne la densité électrique de charges et \vec{E} le champ électrique. Le rapport entre la force de Coulomb et la force de Lorentz est

$$\mu_0 \varepsilon_0 U^2 \ll 1$$

puisque $(\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$ est la vitesse de la lumière dans le vide. L'interaction de Coulomb sera donc négligée elle aussi.

Il ne reste plus qu'à exprimer la force de flottaison. Au lieu d'exprimer la densité en fonction de la pression et de l'entropie, comme cela a été fait dans l'équation (3.40), on peut exprimer la densité en fonction de la pression et de la température T

$$\frac{d\rho}{\rho} = \chi_T dp - \alpha dT \quad (3.47)$$

où l'on ne considère que les variations de température, puisqu'on ne tient pas compte des ondes sonores. Le coefficient de dilatation isobare α est défini par

$$\alpha \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

Dans le noyau, ce paramètre est de l'ordre de 10^{-5} K⁻¹ [Lister et Buffett, 1995; Labrosse, 2003]. La force de flottaison est déterminée comme l'écart de la force d'Archimède à l'état hydrostatique de référence

$$\vec{F}_{\text{flottaison}} = (\rho - \rho_0) \vec{g} = -\alpha \rho_0 \Delta T \vec{g}$$

où intervient le champ de gravité \vec{g} . De même, la pression p ne contient plus la pression hydrostatique p_{ref} de l'état de référence. On obtient finalement l'équation de Navier-Stokes valable pour le noyau de la Terre

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \mathbf{grad}) \vec{u} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} \right] = -\mathbf{grad} p + \vec{j} \wedge \vec{B} - \alpha \rho_0 \Delta T \vec{g} \quad (3.48)$$

où le terme (3.46) a été absorbé dans la pression p .

3.5 Les équations générales

Les équations générales applicables au noyau et utilisées pour décrire les ondes de torsion l'équation de Navier-Stokes (3.48), l'équation de Maxwell-Ampère (3.6), l'équation de l'induction (3.9), la conservation de la masse (3.45) et la relation constitutive du champ magnétique (3.1).

Ces équations de base ne forment pas un système complet car il manque une équation thermodynamique associée à l'évolution de la température. Cependant, même si la convection est importante pour établir ces équations de base, elle ne rentre pas en jeu dans l'étude des ondes de torsion dans le noyau de la Terre. On verra donc plus loin pourquoi le terme de pression n'intervient pas pour les ondes de torsion dans une cavité sphérique, pas plus que la force de d'Archimède s'il n'y a pas de topographie à l'interface noyau-manteau. Dans le cas contraire, il faut tenir compte de la force d'Archimède pour l'étude des ondes de torsion.

On peut faire une dernière remarque sur ces équations : en combinant (3.48) et (3.6) et en ré-écrivant (3.9), on peut faire apparaître des termes qui ont une signification physique plus immédiate :

$$\rho_0 \left[\frac{d\vec{u}}{dt} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} \right] = -\mathbf{grad} \left(p + \underbrace{\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}}_{(a)} \right) + \underbrace{(\vec{B} \cdot \mathbf{grad}) \vec{B}}_{(b)} - \alpha \rho_0 \Delta T \vec{g} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \mathbf{grad}) \vec{B}}_{(c)} = \underbrace{(\vec{B} \cdot \mathbf{grad}) \vec{u}}_{(d)} \quad (3.50)$$

Le terme (a) représente la densité d'énergie magnétique, le terme (b) le cisaillement du champ magnétique par lui-même, le terme (c) traduit l'advection du champ magnétique par le champ de vitesse et enfin le terme (d) décrit le cisaillement du champ de vitesse par le champ magnétique qui va induire un champ magnétique.

Dans ce qui suit, l'importance relative des forces présentes dans le noyau obtenues dans l'équation de Navier-Stokes (3.48) est discutée, et en particulier la force de Coriolis puis la force de Lorentz.

Le noyau est dans l'état de référence hydrostatique stationnaire (3.44). Il n'y a aucun mouvement pour l'instant. Les différents ingrédients vont être progressivement introduits (Coriolis, Lorentz, ...) puis les différents mouvements obtenus discutés.

3.6 Le rôle de la force de Coriolis sur la dynamique du noyau

Que se passe-t-il si on rajoute la force de Coriolis à l'état de référence hydrostatique ? Comme l'état de référence hydrostatique n'induit aucun mouvement, on ne considère plus que les écarts à cet état de référence.

Le système est alors soumis à un équilibre géostrophique

$$2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u} = -\mathbf{grad} p \quad (3.51)$$

où p est la pression dynamique. Comme l'inertie n'intervient pas dans cet équilibre, ce sont des mouvements lents bien particuliers qui vont être générés.

3.6.1 Théorème de Proudman - Taylor

En prenant le rotationnel de la relation (3.51), et en notant \vec{e}_z la direction de rotation ($\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$), on obtient le résultat remarquable suivant

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0$$

Dans le cadre de l'approximation anélastique, on aurait plutôt

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial z} = 0 \quad (3.52)$$

Énoncé du théorème de Proudman-Taylor : *Dans un système en équilibre géostrophique, la rotation impose aux mouvements d'être invariants par rapport à l'axe de rotation.*

Bullard et Gellman [1954] ont montré que, dans une sphère, le seul mouvement possible est celui de cylindres rigides autour de l'axe de rotation.

On peut trouver un champ de vitesse solution de l'équilibre géostrophique (3.51) [Rieutord, 1997, p. 209-210]

$$\vec{u} = \frac{1}{2\Omega\rho} \left(\frac{dp}{dh} \right) \vec{n}_{\text{inf}} \wedge \vec{n}_{\text{sup}} \quad (3.53)$$

où h est la hauteur de fluide au point considéré. Les normales extérieures \vec{n}_{inf} et \vec{n}_{sup} sont explicitées sur la figure (3.3).

Comme $\vec{u} \cdot \mathbf{grad} h = 0$, le champ de vitesse est tangent aux lignes de hauteur constante. Lorsque ces lignes forment des courbes fermées, la solution géostrophique existe et ces lignes définissent des contours géostrophiques. Dans le cas où le fluide est contenu dans une sphère, ces contours géostrophiques forment des cylindres géostrophiques dont un exemple est donné sur la figure (3.3). Le long de ces cylindres géostrophiques, le champ de vitesse est donc constant. Dans le cas où les lignes de hauteur constante ne se referment pas, il n'y a pas de solution géostrophique. Si cela est dû à la présence d'une topographie à la frontière noyau-manteau, il existe alors des ondes inertielles connues sous le nom d'ondes de Rossby.

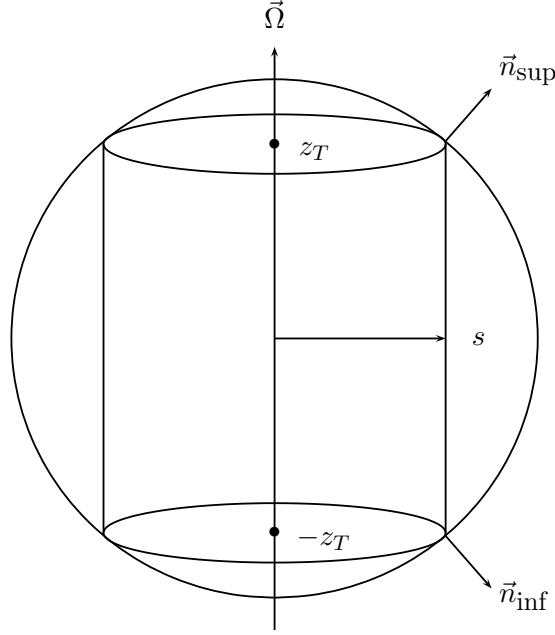


FIG. 3.3: Schéma d'un cylindre géostrophique de rayon s et de hauteur $h = 2z_T$.

On peut aussi remarquer que le long d'un contour géostrophique \mathcal{C} , on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2\Omega\rho} \left(\frac{dp}{dh} \right) \oint_{\mathcal{C}} \|\vec{n}_{\text{inf}} \wedge \vec{n}_{\text{sup}}\| dl \neq 0 \quad (3.54)$$

en dehors de l'équateur où la géostrophie tombe. Cet écoulement peut donc transporter du moment cinétique. Dans le cas du noyau terrestre, un écoulement de ce type va pouvoir échanger du moment cinétique avec le manteau et la graine.

Ce dernier point est d'autant plus intéressant que la période des ondes de torsion (fortement liées à ce type d'écoulement, comme on le verra plus tard) est de l'ordre de quelques dizaines d'années. Or, sur des échelles de temps décennales, il y a échange de moment cinétique entre le noyau et le manteau [Jault, 2003]. Cet échange de moment cinétique fait varier le temps que la Terre met pour faire un tour sur elle-même de quelques millisecondes (cf Fig. 3.4).

3.6.2 Temps de propagation de la contrainte de Taylor dans le noyau

La solution géostrophique décrite ci-dessus a néanmoins besoin de temps pour s'installer dans tout le noyau (propageant la contrainte de Taylor) et devenir stationnaire. Une expérience simple permettant de suivre la formation d'une colonne de Taylor (cylindre géostrophique) dans un gros b cher a été mise en place au sein de l'équipe Géodynamo du LGIT par T. Alboussière et P. Cardin [voir poster présenté au SEDI 2004 que l'on peut retrouver sur le site web de l'équipe Géodynamo : www-lgit.obs.ujf-grenoble.fr/recherche/geodynamo/geodynamo.htm].

Dès que l'on augmente la vitesse de rotation du b cher contenant le fluide (ici de l'eau), on excite des ondes inertielles. Ce sont les ondes qui ont un vecteur d'onde perpendiculaire à

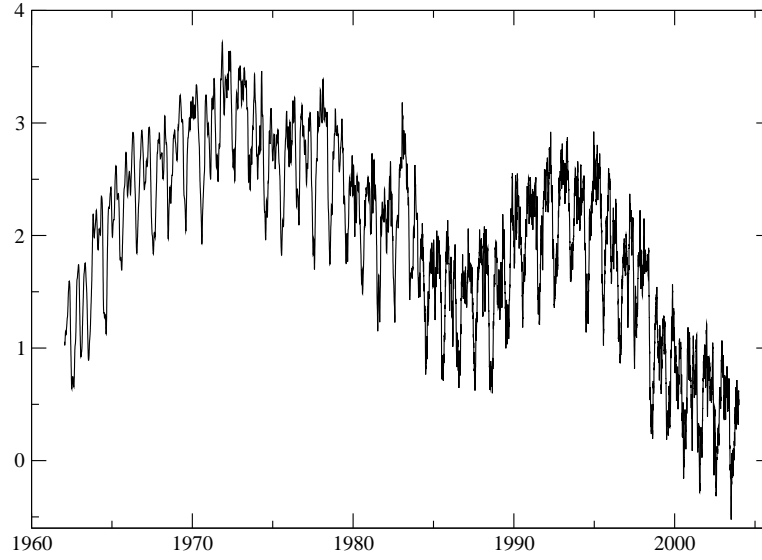


FIG. 3.4: Variations de la longueur du jour (en ms) de 1962 à 2004 [Holme et de Viron, 2004].

l'axe de rotation qui propagent la contrainte de Taylor le long de l'axe de rotation. En effet, les ondes inertielles ont la particularité d'avoir une vitesse de groupe \vec{v}_g perpendiculaire à leur direction de propagation [Greenspan, 1968]

$$\vec{v}_g = \frac{2}{k^3} \vec{k} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{k})$$

Si on note d la taille caractéristique des structures présentes dans le noyau, la vitesse de groupe est de l'ordre de

$$v_g \sim d\Omega$$

Pour les grandes structures du noyau de la taille des cylindres géostrophiques (d est de l'ordre du rayon c du noyau), l'écoulement devient bidimensionnel après quelques tours seulement de la Terre sur elle-même et on peut alors parler de cylindre géostrophique. Par contre, la contrainte de Taylor se propage beaucoup plus lentement le long des petites structures ($d \ll c$); suivant la dynamique de ces petites structures, il se peut que l'écoulement ne devienne jamais bidimensionnel à ces petites échelles.

3.7 La contrainte de Taylor

On considère maintenant l'équilibre magnéto-géostrophique

$$2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u} = -\mathbf{grad} p + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (3.55)$$

Comme dit précédemment, si le théorème de Proudman-Taylor est valable, le seul mouvement autorisé est celui de cylindres rigides autour de l'axe de rotation [Bullard et Gellman, 1954]. Ces cylindres sont souvent qualifiés de géostrophiques (CG).

On se place en sphère ou une couronne sphérique. Si on projette l'équilibre (3.55) sur un tel mouvement ($\vec{u}_g = u_g(s)\vec{e}_\phi$ et qu'on intègre sur la surface d'un CG, on obtient

$$\int_{\text{CG}} \vec{u}_g \cdot \left\{ 2\rho \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \vec{u}}_{(a)} = \underbrace{-\vec{\nabla} p + \vec{j} \wedge \vec{B}}_{(b)} \right\} dS \quad (3.56)$$

• **Calcul du terme (a)**

On précise les vecteurs $\vec{u} = (u_s, u_\phi, u_z)$ en coordonnées cylindriques (s, ϕ, z) et $\vec{u}_g = u_g(s)\vec{e}_\phi$. On a

$$\int_{\text{CG}} \vec{u}_g \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{u}) dS = \int u_g \vec{e}_\phi \cdot (\Omega \vec{e}_z \wedge u_s \vec{e}_s) dS = u_g \Omega \int u_s dS$$

par conservation de la masse. En effet, lorsqu'on intègre sur le volume \mathcal{V} défini par un CG prolongé par les deux calottes sphériques supérieure et inférieure (où la condition de non-pénétration est $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$),

$$\int_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{u}) dV = \int \vec{u} \cdot dS \vec{n} = \int_{\text{calottes}} \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{n}}_0 dS + \int_{\text{CG}} u_s dS = \int u_s dS = 0$$

• **Calcul du terme (b)**

$$\int_{\text{CG}} \vec{u}_g \cdot \vec{\nabla} p dS = s u_g(s) \int_z \frac{1}{r} \underbrace{\oint_\phi \frac{\partial p}{\partial \phi} d\phi}_0 dz = 0$$

Ainsi, l'équation (3.56) se réduit à

$$\int_{\text{CG}} \vec{u}_g \cdot (\vec{j} \wedge \vec{B}) dS = 0$$

qui porte le nom de contrainte de Taylor. Si on avait tenu compte de la force de flottaison, la contrainte de Taylor aurait pris la forme

$$\int_{\text{CG}} \vec{u}_g \cdot \left\{ \vec{j} \wedge \vec{B} - \alpha \rho \theta \vec{g} \right\} dS = 0$$

Comme la force de flottaison est radiale, à cause du modèle simplifié de Terre choisi, elle ne contribue pas dans la contrainte de Taylor qui devient

$$\int_{\text{CG}} (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi dS = 0 \quad (3.57)$$

Dans une sphère ou une couronne sphérique, si le champ magnétique vérifie la contrainte de Taylor, le champ de vitesse est déterminé par la valeur instantanée du champ magnétique (et par la valeur de la force de flottaison, si elle est présente et importante). Le champ de

vitesse géostrophique est alors tel que le champ magnétique continue de vérifier la contrainte de Taylor [Taylor, 1963].

Dans le cas où la contrainte de Taylor n'est pas parfaitement vérifiée, le terme d'inertie balance la force de Lorentz pour donner

$$\rho \int_{\text{CG}} \left(\frac{\partial \vec{u}_g}{\partial t} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} \right) = \int_{\text{CG}} (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi dS \quad (3.58)$$

3.8 Les ondes MAC

Dans le cas où le champ magnétique dans le noyau ne vérifie pas exactement la contrainte de Taylor, il n'y a pas de solution \vec{u} pour l'équilibre (3.55). Il faut alors rajouter encore un ingrédient. Il y a deux choix possibles : la force d'inertie ou la force visqueuse.

Le nombre d'Ekman donne le rapport entre la force visqueuse et la force de Coriolis

$$E = \frac{\nu_*}{\rho L^2 \Omega} \sim 4.10^{-15}$$

avec $\nu_* = 0.015$ Pa.s (viscosité cinématique du fer liquide), $\rho = 1.06 \cdot 10^4$ kg.m⁻³, $L = 2000$ km [de Wijs *et al.*, 1998; Vočadlo *et al.*, 2003] tandis que le rapport entre la force d'inertie et la force de Coriolis est donné par

$$Ro = \frac{U}{L\Omega} \sim 4.10^{-6}$$

avec $U = 6.10^{-4}$ m.s⁻¹ [Jault *et al.*, 1988], $\Omega = 2\pi/86400$ rad.s⁻¹ et toujours $L = 2000$ km. On rajoute donc la force d'inertie dans le système pour obtenir l'équilibre

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u} = -\mathbf{grad} p + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (3.59)$$

Deux types d'ondes peuvent se développer dans un tel système ([Jacobs, 1987, p. 120-122] ou [Galdi et Straughan, 1988, p. 233-236]) : des ondes de type inertiel de courtes périodes (période de l'ordre de la journée) et des ondes lentes, dites MC (pour Magnéto Coriolis). Ces ondes de très grande période sont supposées être la principale contribution à la variation séculaire aux grandes échelles de temps. En présence de la poussée d'Archimède, les ondes MC deviennent les ondes MAC (Magnéto Archimedian Coriolis).

On peut associer deux constantes à l'équilibre précédent : la constante de temps inertielle $T_i = \Omega^{-1}$ et la constante de temps $T_a = c\sqrt{\rho\mu_0}/B$ qui n'est rien d'autre que la constante de temps des ondes d'Alfvén. On peut alors montrer que la période des ondes lentes MC est, dans le cas géophysique,

$$T_{\text{MC}} = \frac{T_i}{T_a^2} \quad (3.60)$$

dont la valeur typique est de quelques milliers d'années. Or, sur ces échelles de temps, on ne peut pas négliger la diffusion du champ magnétique : la période des ondes MC est d'ailleurs proportionnelle au temps de diffusion magnétique T_d

$$T_{MC} = T_d \Lambda^{-1} \quad (3.61)$$

où Λ est le nombre d'Elsasser, défini comme le rapport entre la force de Lorentz et la force de Coriolis (en ordre de grandeur, $j \sim \sigma_c u B$)

$$\Lambda = \frac{\sigma_c B^2}{\Omega \rho} \quad (3.62)$$

Les constantes de temps ne sont donc pas indépendantes les unes des autres

$$\Lambda T_a^2 = T_i T_d \quad (3.63)$$

Pour ces ondes MC, la force de Coriolis domine la force d'inertie et il y a équilibre entre la force de Coriolis et la force de Lorentz : on a donc $\Lambda \sim 1$.

3.9 Vers les ondes de torsion ...

Bien que pour les lentes ondes MAC, la force de Coriolis domine très fortement la force d'inertie, il y a une classe de mouvements qui n'est pas affectée par la force de Coriolis. En effet, la force de Coriolis n'influence que les mouvements qui ne consistent pas en une rotation différentielle de cylindres rigides alignés avec l'axe de rotation [Bullard et Gellman, 1954]. Dans le cas du noyau terrestre, ces ondes sont appelées ondes de torsion.

Si le processus dynamo est en action dans le noyau, la période des ondes de torsion est

$$T_a = \sqrt{T_i T_d} \sim 30 \text{ ans} \quad (3.64)$$

Les ondes de torsion sont associées à deux champs magnétiques qui évoluent sur deux échelles de temps bien différentes. Le champ magnétique *dynamo* qui évolue sur un temps caractéristique de plusieurs milliers d'années – tel que $\Lambda \sim 1$ – peut être considéré comme constant sur une durée de quelques périodes des ondes d'Alfvén T_a . L'onde de torsion est une perturbation associée à un champ magnétique dont la magnitude est petite devant celle du champ dynamo. Son évolution est déterminée par l'équilibre entre la force d'inertie et la force de Lorentz, alors que le champ dynamo est associé à l'équilibre entre la force de Coriolis et la force de Lorentz, la diffusion du champ magnétique dynamo étant importante. Le champ magnétique perturbatif de l'onde de torsion n'a pas le temps d'être diffusé sur quelques périodes de l'onde de torsion. On pourra aussi remarquer que la période des ondes d'Alfvén dépend aussi du champ dynamo (à travers le nombre d'Elsasser).

Chapitre 4

Les ondes de torsion

Ce chapitre commence par aborder les ondes d'Alfvén puis leur lien avec les ondes de torsion. Les propriétés des ondes d'Alfvén sont rapidement passées en revue sur un cas simple. Les moyens d'exciter les ondes d'Alfvén sont discutés et le mécanisme physique de ces ondes abordé. Une fois établi le lien entre les ondes d'Alfvén et les ondes de torsion, l'équation d'onde des ondes de torsion est établie.

4.1 Propriétés générales des ondes d'Alfvén sur un cas simple

Dans cette partie, l'approximation de Boussinesq ne sera pas utilisée parce qu'il n'est pas besoin de convection pour traiter des ondes d'Alfvén.

On pourra retrouver une grande partie de ce cas simple dans [Roberts, 1967]. On considère un fluide parfait incompressible restreint au demi-espace $z > 0$ (cf Fig. 4.1). On ignore tous les phénomènes dissipatifs et le fluide n'est pas en rotation.

Comme l'écoulement est incompressible, le champ de vitesse est à divergence nulle

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

La force de Lorentz, qui agit sur le fluide, dépend des courants \vec{j} et du champ magnétique \vec{B}

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{grad} B^2 + (\vec{B} \cdot \operatorname{grad}) \vec{B} \right]$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Le terme potentiel de la force de Lorentz est absorbé dans la pression p . L'équation de Navier-Stokes est

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \operatorname{grad}) \vec{u} = - \operatorname{grad} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\vec{B} \cdot \operatorname{grad}) \vec{B} \quad (4.1)$$

avec ρ la densité constante. De même que pour le champ de vitesse dans ce cas, la divergence du champ magnétique est nulle

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Finalement, l'équation de l'induction est

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \mathbf{grad}) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \mathbf{grad}) \vec{u} \quad (4.2)$$

Au repos, le fluide baigne dans un champ magnétique uniforme $B_0 \vec{e}_z$. On note \vec{b} la perturbation magnétique : le champ magnétique s'écrit (cf Fig. 4.1)

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z + b_x \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad \vec{b} = (b_0 e^{-i\omega t}, 0, 0)$$

De même, la pression est $p = p_0 + \pi$ où p_0 est constante et π est la pression dynamique associée à la perturbation. En prenant la divergence de (4.1), on trouve que $\delta p = 0$. Mais une solution de l'équation de Laplace constante en dehors d'un volume fermé l'est aussi à l'intérieur de ce volume.

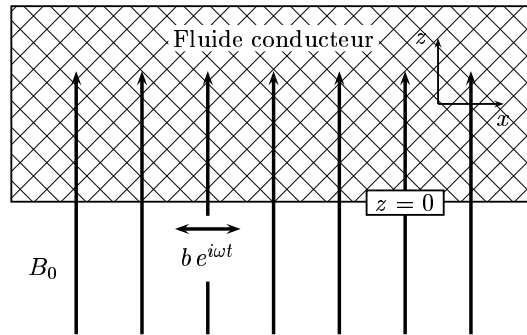


FIG. 4.1: Etude des ondes d'Alfvén sur un cas simple [Roberts, 1967].

En linéarisant les équations (4.1) et (4.2), on obtient

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{B_0}{\mu_0 \rho} \frac{\partial \vec{b}}{\partial z} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \quad (4.4)$$

On peut remarquer que les équations linéarisées sont identiques si

$$\vec{u} = \pm \frac{\vec{b}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \quad (4.5)$$

On peut définir les variables d'Elsasser $(\vec{u} + \vec{b}, \vec{u} - \vec{b})$. Bien que je ne les utilise pas, je mentionne leur possible utilisation : \vec{u} et \vec{b} sont deux variables interchangeables. Ce qui n'est plus le cas pour les ondes de torsion. En combinant les deux équations précédentes, on obtient l'équation d'onde des ondes d'Alfvén dans ce cas particulier

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = V_a^2 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} \quad (4.6)$$

où la vitesse des ondes d'Alfvén est définie par

$$V_a = \frac{B_0}{\sqrt{\rho \mu_0}}$$

Si on prend $B_0 = 5$ gauss (soit $5 \cdot 10^{-4}$ T), on obtient une vitesse d'Alfvén de l'ordre de $5 \cdot 10^{-5}$ m.s⁻¹. Soit la nouvelle variable $\zeta = z \pm V_a t$. On peut montrer que \vec{u} et \vec{b} ne dépendent que de la variable ζ . On peut les exprimer en fonction d'une même fonction vectorielle $\vec{f}(z \pm V_a t)$ (à cause de la relation (4.5)) qui doit vérifier l'équation d'onde (4.6)

$$\vec{u} = \pm V_a \vec{f}(z \pm V_a t) \quad (4.7)$$

$$\vec{b} = B_0 \vec{f}(z \pm V_a t) \quad (4.8)$$

Comme \vec{u} et \vec{b} sont à divergence nulle, on a

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 = \frac{\partial b_z}{\partial z}$$

On recherche une solution ondulatoire (cohérente avec l'état de base stationnaire); on a donc $u_z = b_z = 0$. Les ondes d'Alfvén sont donc des ondes *transverses*. Elles se propagent le long des lignes de champ de \vec{B}_0 avec une polarisation transverse, et une vitesse de phase V_a .

Du point de vue énergétique, la densité totale d'énergie magnétique dans le fluide est

$$\frac{(\vec{B}_0 + \vec{b})^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} + \frac{b^2}{2\mu_0}$$

tandis que la densité d'énergie magnétique de l'onde est

$$\frac{b^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2 f^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 f^2 = \frac{1}{2} \rho u^2$$

Il y a donc équipartition entre l'énergie magnétique et l'énergie cinétique. La densité totale d'énergie de l'onde est

$$\mathcal{E}_{\text{onde}} = \frac{b^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2} \rho u^2 = \rho u^2 = \frac{b^2}{\mu_0}$$

Finalement, on peut calculer le vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{E} = \pm V_a \vec{B}_0 \wedge \vec{f}(z \pm V_a t)$. On trouve que

$$\vec{\Pi} = -\rho V_a^2 \vec{u} + V_a \mathcal{E}_{\text{onde}} \vec{e}_z$$

Le premier terme ne traduit pas une propagation de l'énergie. En effet, le flux d'énergie associé à ce terme est nul à travers une surface fermée car $\text{div } \vec{u} = 0$. De même, en un point z donné, le champ oscille sinusoïdalement : sur un cycle, il n'y a pas non plus de propagation d'énergie. Par contre, le second terme correspond à une propagation d'énergie le long des lignes de champ du champ $B_0 \vec{e}_z$ à la vitesse de groupe V_a (qui n'est pas la vitesse advective).

En conclusion, les ondes d'Alfvén ont une polarisation transverse à leur direction de propagation. Leurs vitesse de phase et vitesse de groupe sont identiques et définissent la vitesse des ondes d'Alfvén

$$V_a = \frac{B_0}{\sqrt{\rho \mu_0}} \quad (4.9)$$

Les ondes, ainsi que leur énergie, se déplacent le long des lignes de champ du champ magnétique ambiant, et ce, d'autant plus vite que ce champ ambiant est fort. La vitesse des ondes d'Alfvén peut être grande devant la vitesse advective et il y a équipartition de l'énergie entre l'énergie magnétique et l'énergie cinétique de l'onde.

Les deux composantes (fluide \vec{u} et magnétique \vec{b}) de l'onde ont la même géométrie (cf Eq. (4.7) et (4.8)) : il est indifférent de décrire l'onde avec \vec{u} ou \vec{b} .

4.2 Ondes d'Alfvén et ondes de torsion

Sur des échelles de temps courtes (inférieures à la centaine d'années), la force de Coriolis domine très fortement la force de Lorentz. Il n'y a pas d'ondes possibles sauf quand la force de Coriolis est équilibre exact avec les forces de pression. Ainsi les seules ondes d'Alfvén restantes sont associées à des mouvements zonaux du fluide, symétriques par rapport à l'équateur, qui correspondent à des mouvements de cylindres géostrophiques [Bullard et Gellman, 1954]. Le seul mouvement autorisé de tels cylindres est une rotation différentielle d'un cylindre par rapport à un autre. C'est pour cela que Taylor [1963] a parlé de *torsional motions*, appellation reprise par Braginsky [1970] (*torsional oscillations*) et rendu en français par *ondes de torsion*.

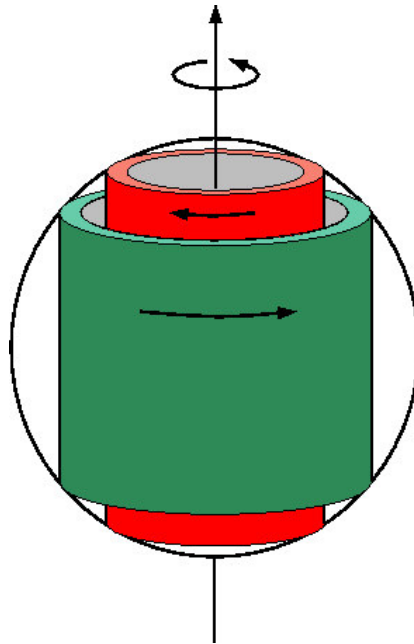


FIG. 4.2: Représentation schématique de la rotation différentielle de deux cylindres géostrophiques.

4.3 Le mécanisme physique des ondes d'Alfvén

Le fluide entraîne les lignes de champ. Cela génère une force de Lorentz qui va s'opposer à ce déplacement des lignes de champ par le fluide (la force de Lorentz est la force de rappel)

pour ramener ces lignes de champ vers leur position initiale.

En caractérisant le déplacement des lignes de champ, on peut retrouver une propriété de ces ondes : on peut décomposer le mouvement cisaillant, d'une part, en une partie parallèle aux lignes de champ (la ligne de champ est étirée tout en étant advectée) et d'autre part, en une partie perpendiculaire aux lignes de champ (advection). Localement, la partie parallèle ne joue aucun rôle cisaillant. Tout se passe donc dans le plan perpendiculaire aux lignes de champ. On retrouve que les ondes d'Alfvén sont des ondes transverses.

4.4 Prise en compte des effets hydrodynamiques, géométrie cartésienne

Je reprends ici l'étude des ondes d'Alfvén, commencée au début de ce chapitre, qui avait permis d'établir les principales propriétés des ondes d'Alfvén. Par contre, je reviens ici sur les phénomènes dissipatifs qui avaient été négligés, et je les ré-introduits. Ce cas relativement simple, traité en partie par Roberts [1967], permet de comprendre ce qui se passe quand une perturbation magnétique arrive dans un fluide conducteur baignant dans son propre champ magnétique ambiant, et dans quelle mesure les ondes d'Alfvén vont être dissipées.

Les équations (4.3) et (4.4) deviennent, en rajoutant les processus dissipatifs

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial t} &= \frac{B_0}{\mu_0 \rho} \frac{\partial b_x}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial b_x}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial u_x}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 b_x}{\partial z^2}\end{aligned}$$

avec ν la viscosité dynamique du fluide et η sa diffusivité magnétique. Le champ de vitesse u_x et le champ magnétique b_x satisfont alors l'équation

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{i\omega}{\eta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{i\omega}{\nu} \right) - \frac{V_a^2}{\eta\nu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \begin{pmatrix} b_x \\ u_x \end{pmatrix} = 0 \quad (4.10)$$

avec $V_a = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho}$ la vitesse des ondes d'Alfvén. On peut chercher des solutions sous la forme

$$\begin{aligned}b_x &= B_0 \sum_{j=1}^4 C_j e^{i(k_j z - \omega t)} \\ u_x &= -i\eta \sum_{j=1}^4 \frac{1}{k_j} \left(k_j^2 - \frac{i\omega}{\eta} \right) C_j e^{i(k_j z - \omega t)}\end{aligned}$$

où les C_j sont quatre coefficients constants et tandis que les k_j sont les racines de l'équation

$$\left(k^2 - \frac{i\omega}{\eta} \right) \left(k^2 - \frac{i\omega}{\nu} \right) - \frac{V_a^2}{\eta\nu} k^2 = 0$$

Dans le cas d'une faible dissipation (cas du noyau), c'est à dire

$$\eta, \nu \ll \frac{V_a^2}{\omega}$$

les valeurs des nombres d'ondes k_j sont

$$k_1 = \frac{\omega}{V_a} \left(1 + \frac{i\omega}{2V_a^2}(\eta + \nu) \right) = -k_3 \quad (4.11)$$

$$k_2 = \frac{iV_a}{\sqrt{\eta\nu}} = -k_4 \quad (4.12)$$

Les termes exponentiels non physiques qui augmentent avec z ne sont pas pris en compte : $C_3 = C_4 = 0$.

Les solutions des équations différentielles (4.10) dépendent des conditions aux limites qu'on adopte. On va regarder deux cas : dans le premier cas, on va considérer une excitation mécanique en $z = 0$ en faisant osciller la paroi délimitant le fluide conducteur ; dans le second, une perturbation magnétique est créée au niveau de cette paroi.

4.4.1 Excitation mécanique

Les conditions aux limites en $z = 0$ correspondant à un mouvement oscillant du milieu solide sont, dans le cas où ce dernier est isolant

$$\begin{aligned} \vec{b} &= (0, 0, 0) \\ \vec{u} &= (u_0 e^{-i\omega t}, 0, 0) \end{aligned}$$

Dans ce cas, on obtient

$$C_1 = -C_2 = -\frac{u_0}{V_a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{P_m}} \right)^{-1}$$

où P_m est le nombre de Prandtl magnétique. Dans le cas du noyau, $P_m \ll 1$ et

$$C_1^{\text{méca}} \sim -\frac{u_0}{V_a} \sqrt{P_m} \sim -C_2^{\text{méca}}$$

La vitesse transmise au fluide est plus petite que la vitesse imposée d'un facteur $\sqrt{P_m}$.

4.4.2 Excitation électromagnétique

On suppose qu'une source externe (par exemple, un anneau de courant modulé par le cycle solaire) produit une perturbation monochromatique à l'interface $z = 0$ (cf Fig. 4.1) et une condition de non glissement sur la vitesse

$$\begin{aligned} \vec{b} &= (b_0 e^{-i\omega t}, 0, 0) \\ \vec{u} &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Dans ce cas, on obtient

$$C_1 = \frac{b_0}{B_0(1 + \sqrt{P_m})} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{b_0\sqrt{P_m}}{B_0(1 + \sqrt{P_m})}$$

et si $P_m \ll 1$,

$$C_1^{\text{mag}} \sim \frac{b_0}{B_0} \quad \text{et} \quad C_2^{\text{mag}} \sim \frac{b_0}{B_0} \sqrt{P_m}$$

Les perturbations qui se développent dans le fluide conducteur sont alors

$$b_x = \frac{b_0}{1 + \sqrt{P_m}} \left(e^{i(k_1 z - \omega t)} + \sqrt{P_m} e^{i(k_2 z - \omega t)} \right) \quad (4.13)$$

$$u_x = -\frac{b_0 V_a}{B_0(1 + \sqrt{P_m})} \left(e^{i(k_1 z - \omega t)} - e^{i(k_2 z - \omega t)} \right) \quad (4.14)$$

$$j_y = \frac{b_0 V_a}{\eta \mu_0(1 + \sqrt{P_m})} \left(\frac{i\omega\eta}{V_a^2} e^{i(k_1 z - \omega t)} - e^{i(k_2 z - \omega t)} \right)$$

Le terme exponentiel en $e^{i(k_1 z - \omega t)}$ représente une onde d'Alfvén progressive dans le sens des z croissants. Cette onde a une longueur d'onde

$$\lambda = V_a \frac{2\pi}{\omega}$$

et s'amortie exponentiellement sur la distance $d_a/(2\pi^2)$ où

$$d_a = \frac{\lambda^2 V_a}{\eta + \nu}$$

La longueur d'onde λ se met à l'échelle comme B_0 puisqu'elle est proportionnelle à la vitesse des ondes d'Alfvén V_a .

La longueur d_a correspond à une longueur hydrodynamique de pénétration de la perturbation dans le fluide conducteur. Elle est proportionnelle à la vitesse des ondes d'Alfvén V_a et donc au champ magnétique ambiant du fluide B_0 . Elle est limitée par les phénomènes diffusifs, qu'ils concernent le champ magnétique (η) ou le champ de vitesse (ν). En l'absence de diffusion, $d_a \rightarrow \infty$.

Dans le cas où $\nu \ll \eta$, on peut relier d_a à une longueur de diffusion du champ magnétique : les courants associés à l'onde d'Alfvén décroissent exponentiellement par diffusion sur un temps caractéristique $\tau = d^2/\eta$. Comme la seule variation spatiale a lieu dans la direction z , la distance d correspond à la longueur d'onde λ de l'onde d'Alfvén. Ainsi, pendant le temps τ , l'onde a parcouru la distance $\lambda^2 V_a/\eta$.

En plus de l'onde d'Alfvén, la perturbation a une composante en $e^{ik_2 z}$ – k_2 est un complexe imaginaire pur – qui décroît rapidement quand z augmente sur une distance caractéristique

$$d_h = \frac{\sqrt{\eta\nu}}{V_a}$$

La perturbation associée à cette composante n'est significative qu'à l'intérieur d'une couche dite de Hartmann. Dans le cas du noyau, $d_h \ll d_a$. Cette couche disparaît dans la limite $\eta \rightarrow 0$ ou $\nu \rightarrow 0$.

4.4.3 Comparaison des excitations

On peut comparer facilement l'efficacité des deux excitations. Pour une excitation équivalente, c'est à dire si

$$\frac{u_0}{V_a} \sim \frac{b_0}{B_0}$$

on obtient, dans le cas du noyau,

$$\left| \frac{C_1^{\text{méca}}}{C_1^{\text{mag}}} \right| \sim \sqrt{P_m} \ll 1$$

$$C_2^{\text{mag}} \sim C_2^{\text{méca}}$$

Dans les deux cas, la composante de Hartmann est la même. Par contre, l'excitation mécanique transmet une onde d'Alfvén $\sqrt{P_m}$ plus petite que dans le cas de l'excitation magnétique. C'est pour cela que Jameson [1964] a choisi une excitation magnétique pour mettre en évidence les ondes d'Alfvén.

4.5 Voir les ondes d'Alfvén ...

4.5.1 ... dans les codes dynamo

Il est actuellement difficile de voir les ondes de torsion dans les codes dynamo à cause des gammes de paramètres que l'on peut atteindre avec les ordinateurs actuels. Cela se voit par exemple sur le nombre de Prandtl magnétique qui est défini par le rapport entre la viscosité dynamique ν du fluide et sa diffusivité magnétique η

$$P_m = \frac{\nu}{\eta} \quad (4.15)$$

Il a été vu à la section 3.4.3 que, pour le noyau, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$. En ce qui concerne la diffusivité magnétique, la valeur habituellement prise pour le noyau est $\eta = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$. Une valeur typique du nombre de Prandtl magnétique est

$$P_m = 10^{-6}$$

dans le noyau. Par contre, pour avoir l'action dynamo dans les codes numériques, il faut prendre un nombre Prandtl magnétique de l'ordre de l'unité, ce qui revient à considérer un noyau à très grande viscosité. Une telle viscosité peut complètement dissiper les ondes de torsion et empêcher de voir tout phénomène de propagation associé à ces ondes. Prendre une telle viscosité, comme l'ont fait Dumberry et Bloxham [2003], donne des ondes dont la période est proche du millier d'années (cf Fig. 4.3). Dans cet exemple, pour observer ces ondes, une autre concession a été faite : la contrainte de Taylor n'a pu être atteinte. Dans cet état de base, le couple du tenseur de Reynolds et le couple visqueux équilibrent le couple de la force de Lorentz. Il faut donc écrire des codes spécifiques pour étudier la propagation de telles ondes.

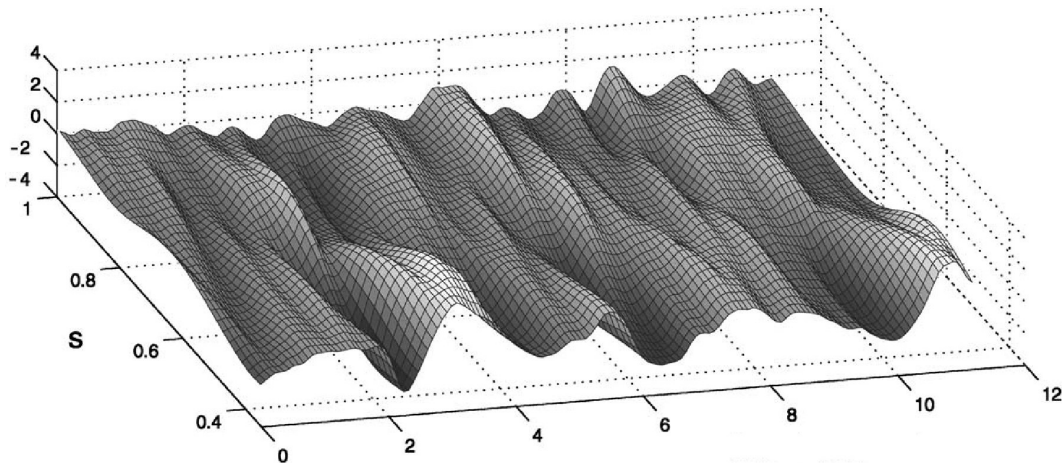


FIG. 4.3: Partie azimutale de la vitesse (en km.an^{-1}) extérieure au cylindre tangent ($0.35 < s < 1$) en fonction du temps (en milliers d'années), constante le long de cylindres géostrophiques, dont la valeur moyenne a été soustraite [Dumberry et Bloxham, 2003].

4.5.2 ... dans les expériences

L'observation expérimentale des ondes de torsion est aussi un défi. D'une part, il faut atteindre l'état de Taylor si on veut des ondes de torsion représentatives de celles du noyau; d'autre part, il faut aussi que le temps de diffusion magnétique soit petit devant la période des ondes d'Alfvén, ce qui n'est pas facilement réalisable [Cardin *et al.*, 2002].

4.5.3 Excitation expérimentale avec un champ magnétique oscillant

L'excitation dans les expériences d'ondes magnétiques n'est pas une chose triviale non plus. Jameson [1964] a préféré une excitation magnétique par des courants alternatifs plutôt qu'une excitation mécanique (cf Eq. (4.13)). Dans cette mise en évidence expérimentale des ondes d'Alfvén, un tore de section rectangulaire a été rempli de sodium liquide à la température de 120°C , puis bobiné (c'est la bobine excitatrice). Le tout est plongé dans un électro-aimant qui crée un champ magnétique parallèle à l'axe du tore, uniforme et constant. Une bobine plongée dans le coeur du tore permet d'avoir la force électromotrice dans le coeur du sodium. Une deuxième bobine, englobant tout le dispositif expérimental, donne accès au champ magnétique moyenné sur toute la section du système. Ces deux bobines permettent d'enregistrer la réponse du fluide en même que les ondes d'Alfvén sont excitées par des courants alternatifs. Ceci est essentiel parce que la période des ondes d'Alfvén est du même de grandeur que le temps de diffusion magnétique. L'expérimentateur cherche alors la fréquence de résonance des courants en variant la fréquence de l'excitation (cf Fig. 4.4).

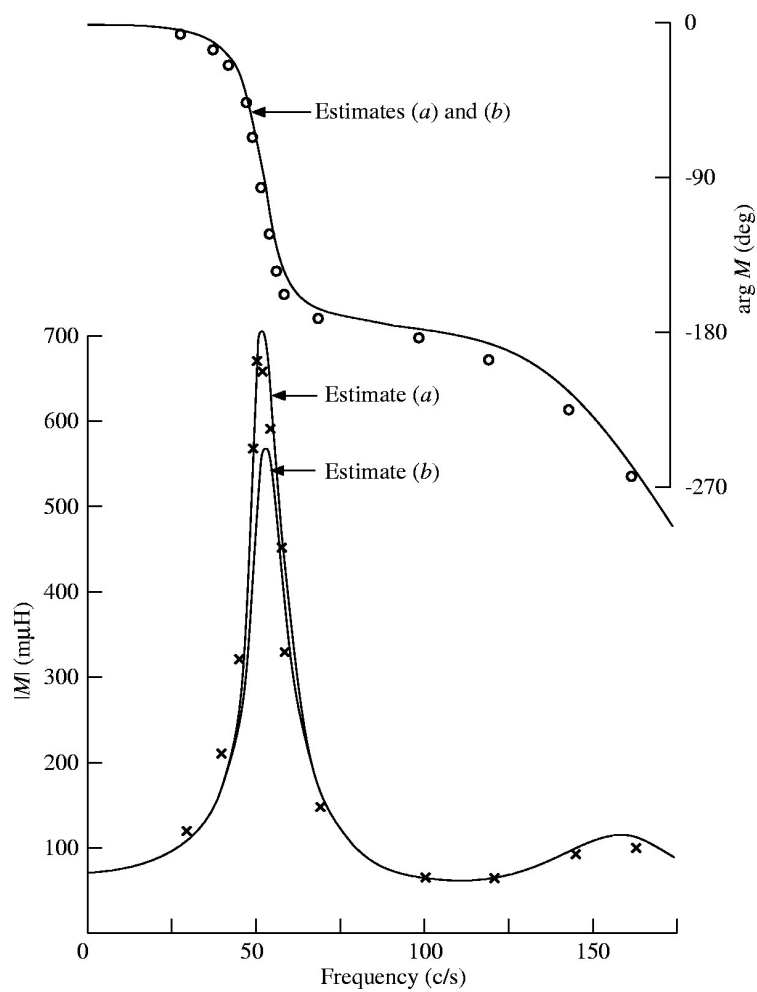


FIG. 4.4: Courbe de résonance obtenue par Jameson [1964] lors de la mise en évidence expérimentale des ondes d'Alfvén avec du sodium liquide. M est l'inductance mutuelle entre la bobine imposant un champ magnétique uniforme dans le sodium liquide et la bobine de mesure.

4.6 L'équation d'onde des ondes de torsion

Dans cette partie est établie l'équation d'onde des ondes de torsion valable pour le noyau de la Terre, à la suite de [Braginsky, 1970], comme dans l'article de [Jault, 2003]. On y considère la couche de diffusion magnétique nécessaire pour raccorder correctement le champ magnétique du noyau à celui du manteau et une couche conductrice à la base du manteau (qui a une grande influence sur la propagation des ondes de torsion car une telle couche a tendance à les dissiper).

4.6.1 Équation de la dynamique

En regardant la contrainte de Taylor, on a obtenu l'équation (3.58). C'est l'équilibre dynamique valable pour le noyau sur des échelles de temps décennales quand la contrainte de Taylor est approximativement vraie. Les ondes de torsion consistent en une rotation différentielle – $\vec{u}_g(s, t) = s \omega_g(s, t) \vec{e}_\phi$ – de cylindres rigides dits *géostrophiques* (CG) dont l'accélération est donnée par l'équation (3.58).

Les ondes de torsion peuvent transporter du moment cinétique (voir l'équation (3.54)), et qu'il y a échange de moment cinétique entre le noyau et le manteau sur des échelles de temps décennales [Jault, 2003]. Le moment cinétique du manteau est pris en compte via les variations temporelles $\Omega(t)$ de la rotation du manteau.

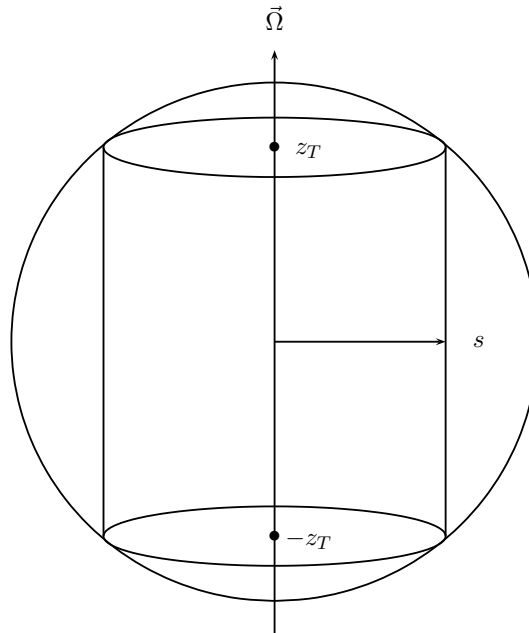


FIG. 4.5: Notations utilisées.

En utilisant les notations de la figure (4.5), l'accélération d'un CG est finalement

$$\boxed{4\pi\rho \, sz_T \, \frac{\partial}{\partial t}(\omega_g + \Omega) = \int_z \oint_\phi (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi \, d\phi \, dz} \quad (4.16)$$

C'est la relation fondamentale de la dynamique pour un cylindre géostrophique qui couple le champ de vitesse au champ magnétique.

4.6.2 Champ magnétique induit par les ondes de torsion

L'équation de l'induction (3.11) est

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\vec{u}_g \wedge \vec{B}) \quad (4.17)$$

Comme $\vec{u}_g \wedge \vec{B} = -u_g B_s \vec{e}_z + u_g B_z \vec{e}_s$,

$$\mathbf{rot}(\vec{u}_g \wedge \vec{B}) = \begin{cases} -\omega_g \frac{\partial B_s}{\partial \phi} \\ s\omega_g \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}(sB_s) \right) + sB_s \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \\ -\omega_g \frac{\partial B_z}{\partial \phi} \end{cases}$$

Le champ magnétique étant à divergence nulle,

$$0 = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}(sB_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

l'équation de l'induction s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = sB_s \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \vec{e}_\phi - \omega_g \frac{\partial_1 \vec{B}}{\partial \phi}} \quad (4.18)$$

où $\partial_1/\partial\phi$ désigne la dérivée en tenant fixe les vecteurs de la base. C'est la deuxième équation couplée qui relie le champ magnétique au champ de vitesse.

4.6.3 L'équation d'onde

Notations :

$$\Psi(X) = \frac{1}{\pi} \oint \left[X(+z_T) + X(-z_T) \right] d\phi \quad (4.19)$$

$$\{B_s^2\}(s) = \frac{1}{4\pi z_T} \int_{-z_T}^{z_T} \oint B_s^2 d\phi dz \quad (4.20)$$

Les notations sont rappelées dans l'appendice A.

La partie intrinsèque

On a maintenant les deux équations couplées (4.16) et (4.18) qui vont conduire à la partie intrinsèque de l'équation d'onde, partie à laquelle il faudra ajouter les contributions des couches limites.

Soit $\vec{B}_M = \vec{B} - B_\phi \vec{e}_\phi$ le champ magnétique méridien,

$$(\mu_0 \vec{j} \wedge \vec{B})_\phi = \frac{1}{s} \operatorname{div}(s \vec{B}_M B_\phi) + \frac{1}{s} \underbrace{\left(B_\phi \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} - B_s \frac{\partial B_s}{\partial \phi} - B_z \frac{\partial B_z}{\partial \phi} \right)}_{\oint \frac{\partial}{\partial \phi} (B_\phi^2 - B_s^2 - B_z^2) d\phi = 0}$$

d'où

$$\oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi = \frac{1}{\mu_0 s} \oint \operatorname{div}(s \vec{B}_M B_\phi) d\phi \quad (4.21)$$

On peut intégrer sur z la contribution longitudinale de la force de Lorentz (4.21) :

$$\int_{-z_T}^{z_T} \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi dz = \frac{1}{\mu_0 s} \int_{-z_T}^{z_T} \oint \left[\underbrace{\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s^2 B_s B_\phi)}_{\text{int. par partie}} + s \frac{\partial}{\partial z} (B_z B_\phi) \right] d\phi dz \quad (4.22)$$

L'intégration par partie donne

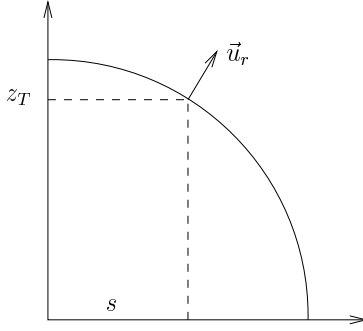
$$\frac{\partial}{\partial s} \int_{-z_T}^{z_T} (s^2 B_s B_\phi) dz = [s^2 B_s B_\phi](+z_T) \frac{\partial z_T}{\partial s} + [s^2 B_s B_\phi](-z_T) \frac{\partial z_T}{\partial s} + \int_{-z_T}^{z_T} \frac{\partial}{\partial s} (s^2 B_s B_\phi) dz$$

On peut alors ré-écrire (4.22) :

$$\begin{aligned} \int_{-z_T}^{z_T} \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi dz &= \frac{1}{s^2 \mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(s^2 \int_{-z_T}^{z_T} \oint B_s B_\phi d\phi dz \right) \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \oint \left[(B_s B_\phi)(z_T) \frac{\partial z_T}{\partial s} + (B_s B_\phi)(-z_T) \frac{\partial z_T}{\partial s} \right] d\phi \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \oint \left[(B_z B_\phi)(z_T) \frac{\partial z_T}{\partial s} - (B_z B_\phi)(-z_T) \frac{\partial z_T}{\partial s} \right] d\phi \end{aligned} \quad (4.23)$$

En utilisant les équations (4.24) et (4.25), (4.23) devient

$$\begin{aligned} \int_{-z_T}^{z_T} \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi dz &= \frac{1}{s^2 \mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(s^2 \int_{-z_T}^{z_T} \oint B_s B_\phi d\phi dz \right) \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \oint \left[(B_r B_\phi)(z_T) \frac{\partial z_T}{\partial s} + (B_r B_\phi)(-z_T) \frac{\partial z_T}{\partial s} \right] d\phi \end{aligned}$$



$$\vec{u}_r = \frac{1}{c} \begin{cases} s & \frac{\partial z_T}{\partial s} = -\frac{s}{z_T} \\ 0 \\ z \end{cases}$$

$$B_r = \vec{B} \cdot \vec{u}_r = \frac{s}{c} B_s + \frac{z}{c} B_z$$

$$cB_r(+z_T) = sB_s + z_TB_z \quad (4.24)$$

$$cB_r(-z_T) = sB_s - z_TB_z \quad (4.25)$$

On note, à partir de maintenant, \vec{B} le champ magnétique constant sur une durée petite devant le temps de diffusion magnétique et \vec{b} le champ induit par les ondes de torsion. Le champ total dans le noyau (précédemment noté \vec{B}) est maintenant $\vec{B} + \vec{b}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-z_T}^{z_T} \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi dz &= \frac{1}{s^2 \mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(s^2 \int_{-z_T}^{z_T} \oint \underbrace{(B_s \frac{\partial b_\phi}{\partial t} + \frac{\partial b_s}{\partial t} B_\phi)}_{\text{terme (a)}} d\phi dz \right) \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \oint \left[(B_r \frac{\partial b_\phi}{\partial t} + \frac{\partial b_r}{\partial t} B_\phi)(z_T) \frac{\partial z_T}{\partial s} + (B_r \frac{\partial b_\phi}{\partial t} + \frac{\partial b_r}{\partial t} B_\phi)(-z_T) \frac{\partial z_T}{\partial s} \right] d\phi \end{aligned}$$

Le terme (a) est calculé à partir de (4.18)

$$\begin{aligned} B_s \frac{\partial b_\phi}{\partial t} + \frac{\partial b_s}{\partial t} B_\phi &= sB_s^2 \frac{\partial \omega_g}{\partial s} - \omega_g \left(\underbrace{B_s \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + B_\phi \frac{\partial B_s}{\partial \phi}} \right) = sB_s^2 \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \\ \oint \frac{\partial}{\partial \phi} (B_s B_\phi) d\phi &= 0 \end{aligned}$$

On obtient ainsi la contribution intrinsèque à l'équation d'onde où interviennent les notations (4.19) et (4.20)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-z_T}^{z_T} \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi dz &= \frac{4\pi}{s^2 \mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(s^3 z_T \{B_s^2\} \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{a\pi}{\mu_0 z_T} \Psi \left(B_r \frac{\partial b_\phi}{\partial t} + \frac{\partial b_r}{\partial t} B_\phi \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Contribution de la couche limite de diffusion magnétique

Bien que la diffusivité magnétique soit négligeable en volume, ce n'est plus le cas à la frontière noyau-manteau dans la couche de diffusion magnétique. On note \vec{b}_λ le champ magnétique dans cette couche qui permet de raccorder le champ dans le coeur du noyau au champ à la base du manteau. Comme la composante radiale d'un champ magnétique est continue à une interface,

on a $b_{\lambda r} = 0$ en $r = c$. Dans une couche limite, les dérivées horizontales (par rapport aux variables θ et ϕ) sont négligées devant la dérivée radiale. On suppose de plus que les variations radiales du champ sont petites devant les variations de sa dérivée radiale (continuité de la composante radiale du champ magnétique), d'où

$$\mathbf{rot} \vec{b}_\lambda = \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r b_{\lambda\phi}) \sim -\frac{b_{\lambda\phi}}{r} - \frac{\partial b_{\lambda\phi}}{\partial r} \sim -\frac{\partial b_{\lambda\phi}}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r b_{\lambda\theta}) \end{cases}$$

Ainsi

$$(\mathbf{rot} \vec{b}_\lambda \wedge \vec{B})_\phi \sim B_r \frac{\partial b_{\lambda\phi}}{\partial r}$$

avec

$$\left. \frac{\partial b_{\lambda\phi}}{\partial z} \right|_s = \left. \frac{\partial b_{\lambda\phi}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \right|_s$$

La force de Lorentz agissant sur le cylindre géostrophique est alors

$$\int_{-z_T}^{z_T} \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi dz = \frac{1}{\mu_0} \int_{-z_T}^{z_T} \oint \frac{B_r}{\cos \theta} \frac{\partial b_{\lambda\phi}}{\partial z} d\phi dz$$

L'approximation de couche limite

$$\frac{B_r}{\cos \theta} \frac{\partial b_{\lambda\phi}}{\partial z} \sim \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_r b_{\lambda\phi}}{\cos \theta} \right)$$

conduit à la deuxième contribution qui est alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-z_T}^{z_T} \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi dz = \frac{c\pi}{\mu_0 z_T} \Psi(B_r \frac{\partial b_{\lambda\phi}}{\partial t}) \quad (4.27)$$

où la notation (4.19) est utilisée.

Influence d'une couche conductrice à la base du manteau

Il s'agit d'une potentielle couche conductrice à la base du manteau : dans un travail commun, Mathews [2002] et Buffet [2002] ont étudié l'influence du couplage électromagnétique noyau-manteau sur la nutation de la Terre. Ils concluent qu'une fine couche conductrice à la base du manteau ayant une conductance de 10^8 Siemens explique les données de nutation. Cependant, ces résultats sont mis à mal par les résultats de Deleplace [2005] : le couple visqueux semble justement nécessaire pour expliquer les données de nutation.

Si on suppose que cette couche a une conductivité du même ordre de grandeur que celle du noyau, son épaisseur est comprise entre la centaine de mètres et le kilomètre.

On note σ_m sa conductivité caractéristique et Δ son épaisseur caractéristique ; \vec{b}_Δ est la contribution au champ magnétique de cette couche. De même que pour la couche limite de diffusion magnétique, on a ici $b_{\Delta r} = 0$ en $r = c$.

Les mouvements zonaux coupent les lignes du champ méridien \vec{B}_M . Les courants $\vec{j} = \sigma \vec{u} \wedge \vec{B}_M$ sont alors aussi dans le plan méridien. Si la couche conductrice est présente, les courants viennent y boucler, ce qui couple le noyau au manteau. La force de Lorentz résultante est alors perpendiculaire au plan méridien, donc suivant \vec{e}_ϕ .

On détermine la composante $b_{\Delta\phi}$ en écrivant la continuité de la composante parallèle du champ électrique de part et d'autre de la frontière noyau-manteau. Côté noyau, on a

$$\vec{E}_{//,c} = \frac{\vec{j}_{//,c}}{\sigma_c} - \left(\vec{u} \wedge \vec{B} \right)_{//} = \frac{\vec{j}_{//,c}}{\sigma_c} - s \omega_g B_r \vec{e}_\theta$$

et côté manteau

$$\vec{E}_{//,m} = \frac{\vec{j}_{//,m}}{\sigma_m}$$

Si on suppose la conductance de la couche conductrice $\sigma_m \Delta$ petite devant la conductance de la couche diffusive magnétique $\sigma_c \delta_\lambda$, et ce, dans le cadre des approximations de couche limite (cf section 4.6.3), on peut négliger les courants côté noyau. Comme

$$\vec{j}_{//,m} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{rot} \vec{b}_\Delta)_\theta = \frac{1}{\mu_0} \frac{b_{\Delta\phi}}{\Delta}$$

on obtient

$$-s \omega_g B_r = \frac{b_{\Delta\phi}}{\mu_0 \sigma_m \Delta}$$

que l'on reporte dans (4.27). Ainsi la contribution de la couche conductrice à la base du manteau est

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-z_T}^{z_T} \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi dz = -\frac{c\pi}{z_T} s \sigma_m \Delta \Psi(B_r^2) \frac{\partial \omega_g}{\partial t} \quad (4.28)$$

Influence de la couche d'Ekman

Il a été vu à la section 3.4.3 d'introduction que la dissipation visqueuse peut être considérée comme négligeable en volume. Cependant, cela n'est plus vrai près de la frontière noyau-manteau où il faut prendre en compte une couche d'Ekman où la viscosité du fluide influence la propagation des ondes de torsion dans le noyau. En particulier, une telle couche restreint le domaine d'application de la contrainte de Proudman-Taylor qui n'est plus valable alors que dans le coeur du fluide. Le coeur de l'écoulement est toujours composé de cylindres géostrophiques, mais ceux-ci sont freinés à leurs deux extrémités par la couche limite visqueuse.

Le mouvement géostrophique (noté \vec{u}_0) engendre dans la couche d'Ekman un écoulement secondaire (noté \vec{u}_1) par *pompage d'Ekman* [Greenspan, 1968]

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\sqrt{|\cos \theta|}} \left(\vec{n} \wedge \vec{u}_0 + \vec{u}_0 \operatorname{sgn}(\vec{n} \cdot \vec{\Omega}) \right) \right)$$

Ce résultat intermédiaire ne satisfait pas la condition de non-pénétration ($\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$) à la surface du noyau, bien que $\vec{n} \cdot \vec{u}_0 = 0$ soit vérifié. Prendre en compte la couche d'Ekman a

pour conséquence de modifier la contrainte de Taylor (3.57) parce que le frottement visqueux tend à ralentir le mouvement des cylindres géostrophiques. Dans la couche limite visqueuse, l'écoulement secondaire \vec{u}_1 a une dynamique associée à l'équilibre entre l'inertie et le pompage d'Ekman. Dans le cas où la surface du noyau est une sphère et si les mouvements sont géostrophiques, on peut montrer que [Greenspan, 1968] :

$$\frac{\partial \omega_g(s)}{\partial t} = -E^{1/2} \Omega z_T^{-3/2} \omega_g(s) \quad (4.29)$$

où E est le nombre d'Ekman. Prendre en compte la couche d'Ekman permet aussi d'étudier le couplage visqueux entre le noyau et le manteau.

Finalement : l'équation d'onde

En regroupant les contributions (4.26) et (4.27), et en notant $\vec{b}_m = \vec{b} + \vec{b}_\lambda$ le champ à la base du manteau ($b_{\lambda r} = 0$), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-z_T}^{z_T} \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi dz &= \frac{1}{s^2 \mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(s^3 \int_{-z_T}^{z_T} \oint B_s^2 \frac{\partial \omega_g}{\partial s} d\phi dz \right) \\ &+ \frac{c\pi}{\mu_0 z_T} \Psi(B_r \frac{\partial b_{m\phi}}{\partial t} + \frac{\partial b_{mr}}{\partial t} B_\phi) \end{aligned}$$

Il faut y ajouter la contribution de la couche conductrice à la base du manteau (4.28). On reporte finalement la contribution de la couche d'Ekman (4.29) dans la relation fondamentale de la dynamique d'un cylindre géostrophique (4.16) pour obtenir l'équation d'onde des ondes de torsion, dans un noyau sans graine :

$$\begin{aligned} 4\pi\rho s z_T \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\omega_g + \Omega) &= \frac{4\pi}{s^2 \mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(s^3 z_T \{B_s^2\} \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{c\pi}{\mu_0 z_T} \Psi(B_r \frac{\partial b_{m\phi}}{\partial t} + \frac{\partial b_{mr}}{\partial t} B_\phi) \\ &- \frac{\pi c s \sigma_m \Delta}{z_T} \Psi(B_r^2) \frac{\partial \omega_g}{\partial t} \\ &- 4\pi\rho\Omega E^{1/2} s z_T^{-1/2} \frac{\partial \omega_g}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dans le membre de droite de cette équation, le troisième terme traduit la dissipation de la couche conductrice à la base du manteau et le dernier terme la dissipation visqueuse dans la couche d'Ekman. La suite de ce travail se place dans la limite $E \rightarrow 0$. Les effets de la couche d'Ekman ne seront pas pris en compte.

Les variations temporelles du manteau $d\Omega/dt$, reliées linéairement aux variations de moment cinétique transportées par les mouvements géostrophiques, sont aussi un moyen de coupler entre eux le mouvement des différents CG. Ce qui se traduit par le fait que l'équation d'onde (4.31) ne peut pas s'écrire simplement comme une équation pour la pulsation $\omega_g^* = (\omega_g + \Omega)$ à cause du couplage avec le manteau (le troisième terme du membre de droite de l'équation d'onde).

Quant au deuxième terme, il est nul quand le champ magnétique est axisymétrique ($\Psi(X) = 0$ quand X est indépendant de ϕ). N'y contribue donc que la partie non-axisymétrique du champ magnétique. On le calcule à partir de (4.18) dont on ne prend que la composante radiale qui est continue à la frontière noyau-manteau

$$\left. \frac{\partial b_{m\phi}}{\partial t} \right|_{r=c}$$

b_{mr} est obtenu à partir du potentiel dont dérive le champ magnétique en supposant un raccordement sur un manteau isolant

$$\vec{b}_m = -\mathbf{grad} V$$

En utilisant un développement en harmoniques sphériques, on peut montrer que pour les champs magnétiques utilisées dans ce travail et dérivant d'un potentiel (milieu isolant)

$$\oint B_r B_\phi d\phi \ll B_r B_\phi$$

Si le champ magnétique total s'écrit maintenant comme la somme d'un champ dynamo (constant sur l'échelle de temps des ondes de torsion) \vec{B} et un champ induit par les ondes de torsion \vec{b} , alors

$$\oint (B_r b_\phi + B_\phi b_r) d\phi \ll B_r b_\phi, B_\phi b_r$$

et donc le deuxième terme de l'équation d'onde $\Psi(B_r b_\phi + B_\phi b_r)$ est négligé. Cette approximation est très bien vérifiée numériquement.

Dans la limite $E \rightarrow 0$, l'équation d'onde se réduit à

$$\begin{aligned} 4\pi\rho sz_T \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\omega_g + \Omega) &= \frac{4\pi}{s^2\mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(s^3 z_T \{B_s^2\} \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \right) \\ &\quad - \frac{\pi cs\sigma_m \Delta}{z_T} \Psi(B_r^2) \frac{\partial \omega_g}{\partial t} \end{aligned}$$

Comme le moment d'inertie du noyau est à peu près dix fois plus faible que celui du manteau, on peut négliger les variations $d\Omega/dt$ devant $d\omega_g/dt$, l'équation d'onde devient

$$\begin{aligned} 4\pi\rho sz_T \frac{\partial^2 \omega_g}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{s^2\mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(s^3 z_T \{B_s^2\} \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \right) \\ &\quad - \frac{\pi cs\sigma_m \Delta}{z_T} \Psi(B_r^2) \frac{\partial \omega_g}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Finalement, dans le cas où il n'y a pas de couche conductrice à la base du manteau, l'équation d'onde se réduit à

$$4\pi\rho sz_T \frac{\partial^2 \omega_g}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{s^2\mu_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(s^3 z_T \{B_s^2\} \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \right) \quad (4.32)$$

4.6.4 Conditions aux limites

L'équation d'onde est une équation aux dérivées partielles du second ordre en temps comme en espace. Il faut donc se fixer deux conditions initiales et deux conditions aux limites : par exemple, à l'axe et à l'équateur.

A l'axe de rotation : $s \rightarrow 0$

Dans le cas d'un champ magnétique non-axisymétrique, la condition à l'axe est [Jault et Légaut, 2005]

$$\left. \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \right|_{s=0,t} = 0 \quad (4.33)$$

A l'équateur : $s \rightarrow c$

Lorsqu'on se rapproche de l'équateur, la hauteur des cylindres géostrophiques tend à s'annuler ($z_T \rightarrow 0$), ce qui est synonyme de discontinuité à cause des termes en z_T^{-1} dans l'équation d'onde. On impose que le terme en facteur de z_T^{-1} soit nul.

Le premier terme du membre de droite de l'équation d'onde (4.31) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(s^3 z_T \{B_s^2\} \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \right) = -\frac{s^4}{z_T} \{B_s^2\} \frac{\partial \omega_g}{\partial s} + z_T \frac{\partial}{\partial s} \left(s^3 \{B_s^2\} \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \right)$$

Dans le cas d'un champ magnétique axisymétrique, la condition en $s = c$ est

$$\frac{\partial \omega_g}{\partial s} = -\mu_0 \frac{\oint \sigma_m \Delta B_r^2 d\phi}{\oint B_r^2 d\phi} \frac{\partial \omega_g}{\partial t} \quad \text{en} \quad s = c \quad (4.34)$$

si $\oint B_r^2 d\phi \neq 0$ à l'équateur [Jault et Légaut, 2005].

Dans le cas d'un manteau isolant ($\sigma_m = 0$), la condition en $s = c$ est

$$c \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \oint B_r^2 d\phi = \oint \left(B_r \frac{\partial b_{m\phi}}{\partial t} + B_\phi \frac{\partial b_{mr}}{\partial t} \right) d\phi \quad (4.35)$$

4.6.5 Période des ondes de torsion

Dans le cas d'un manteau isolant ($\sigma_m = 0$) et d'un champ magnétique axisymétrique, l'équation d'onde (4.31), pour une solution oscillante en $e^{i\omega t}$, se réduit à [Braginsky, 1970]

$$-\omega^2 \underbrace{\mu_0 \rho s^3 z_T}_M \omega_g = \frac{d}{ds} \left(\underbrace{s^3 z_T \{B_s^2\}}_T \frac{d\omega_g}{ds} \right)$$

qui est analogue à l'équation d'une onde transverse le long d'une corde de guitare. Si cette corde a une masse linéique M et subit une tension T , la vitesse de telles ondes transverses est

$$V = \sqrt{\frac{T}{M}} = \sqrt{\frac{\{B_s^2\}}{\mu_0 \rho}} \quad (4.36)$$

qui est du type vitesse d'Alfvén pour un champ magnétique caractéristique $\sqrt{\{B_s^2\}}$. La période de l'onde est alors

$$T = \sqrt{\frac{\mu_0 \rho \mathcal{L}^2}{\{B_s^2\}}} \quad (4.37)$$

où \mathcal{L} est la longueur d'onde de l'onde. Elle est fixée soit par le profil initial choisi, soit par la période du mécanisme d'excitation des ondes. Pour estimer l'ordre de grandeur de la période des ondes de torsion, $\mathcal{L} = c$ a été choisi : cela donne une borne supérieure à l'estimation.

La valeur de la composante radiale B_r du champ magnétique à la frontière noyau-manteau est une bonne approximation pour $\sqrt{\{B_s^2(s)\}}$. A partir des mesures magnétiques à la surface de la Terre et prolongées vers la frontière noyau-manteau en supposant le manteau isolant, on peut estimer $B_r \sim 5 \cdot 10^{-4}$ Tesla. On obtient alors une vitesse de propagation des ondes de torsion de $4.5 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ soit 140 km.an^{-1} , pour une période de 25 ans.

La relation (3.64) donne une borne inférieure de la période des ondes de torsion

$$T \gg 1 \text{ jour}$$

Seule la composante radiale du champ magnétique a été prise en compte dans l'estimation de (4.37) et la longueur d'onde a été surestimée en prenant le rayon du noyau ; d'une façon plus générale, on peut dire que les ondes de torsion sont associées à des échelles de temps décennales :

$$T < 100 \text{ ans}$$

4.6.6 Direction de propagation

L'équation d'onde obtenue (4.31) des ondes de torsion est réversible en temps sauf le terme dissipatif associé à la possible couche conductrice à la base du manteau : le membre de gauche et le premier terme du membre de droite sont réversibles en temps. Le dernier terme aussi, parce que le champ magnétique induit est lui-aussi réversible en temps. Il n'y a donc aucune direction privilégiée pour les ondes de torsion dans le noyau.

Le fait que Hide *et al.* [2000] voient dans les données magnétiques un seul sens de propagation (de l'équateur vers les pôles) est plutôt une indication de la dissipation dues aux couches conductrices du manteau ou à la graine. Cela peut aussi être associé à l'endroit où de telles ondes sont excitées, par exemple à l'équateur (voir le mécanisme d'excitation décrit au chapitre 6).

4.7 Conclusions

Les ondes d'Alfvén sont présentes lorsqu'un fluide conducteur d'électricité est baigné par un champ magnétique ambiant. La dynamique de ces ondes est déterminée par ce champ magnétique ambiant. Les composantes fluide \vec{u} et magnétique \vec{b} des ondes d'Alfvén ont même géométrie ; connaissant l'une, on obtient l'autre (cf Eq. (4.7) et (4.8)).

Les ondes de torsion sont des ondes d'Alfvén particulières : ces ondes apparaissent quand la force de Coriolis est exactement équilibrée par les forces de pression. La force de Coriolis, qui n'influence pas la dynamique de l'onde, impose par contre sa géométrie : le seul mouvement autorisé est la rotation différentielle de cylindres géostrophiques alignés sur l'axe de rotation de la Terre. Toutes les particules de fluide formant un même cylindre géostrophique ont même vitesse. Ainsi, la vitesse géostrophique est constante sur un tel cylindre. La dynamique de ces cylindres est déterminée par le champ magnétique baignant le noyau de la Terre via sa composante perpendiculaire à l'axe de rotation. Par la suite, ce champ sera dit *champ principal* ou *champ dynamo*. Le champ magnétique total est la somme du champ magnétique principal et de la composante magnétique de l'onde. Dans les simulations de propagation de ces ondes dans le noyau, présentées dans le prochain chapitre, le champ principal est supposé constant. Cependant, alors que pour les ondes d'Alfvén, les variables \vec{u} et \vec{b} sont interchangeables et présentent la même géométrie, ce n'est pas le cas des ondes de torsion. En effet, la composante magnétique de l'onde de torsion exprimée à la base du manteau (\vec{b}_m) n'a pas pu être éliminée de l'équation d'onde (4.30) et la géométrie de la composante magnétique de l'onde de torsion est imposée par le champ magnétique principal. Ainsi les deux composantes fluide \vec{u} et magnétique \vec{b} de l'onde de torsion n'ont pas la même géométrie. En ce qui concerne la longueur d'onde de l'onde de torsion, dans ce travail, elle est fixée par le profil initial choisi ou par la période du mécanisme d'excitation décrit dans le dernier chapitre de cette thèse.

Chapitre 5

Propagation dans le noyau terrestre

Dans ce chapitre, on se propose de déterminer l'évolution temporelle de la vitesse géostrophique. Il faut pour cela résoudre l'équation d'onde, pour laquelle un modèle de champ magnétique à l'intérieur du noyau est nécessaire. Les premiers codes numériques utilisés sont décrits et les résultats obtenus présentés.

5.1 Modèle de champ magnétique interne au noyau

L'évolution temporelle d'une onde de torsion est directement reliée au champ magnétique *dynamo* présent dans le noyau (lequel évolue sur des échelles de temps supérieures au millier d'années : il est constant sur des échelles de temps de l'ordre de quelques périodes des ondes de torsion). Or, on ne connaît pas bien le champ magnétique à l'intérieur du noyau. Plus précisément, on n'en mesure que la partie qui parvient à la surface de la Terre. Faire le trajet en sens inverse, au moins pour se faire une idée aux grandes périodes du champ magnétique à la surface du noyau, impose de faire une hypothèse sur la conductivité du manteau, laquelle est d'autant plus mal contrainte qu'on se rapproche du noyau.

Un modèle compliqué n'ayant pas beaucoup de pertinence, j'en décris un très simple : un champ magnétique poloïdal est prolongé de la surface de la Terre à la frontière noyau-manteau à travers un manteau conducteur. Comme le manteau est isolant, il n'y a pas de champ magnétique toroïdal dans le manteau (cf (D.5)) et donc à la frontière noyau-manteau. Le champ poloïdal dans le manteau a été obtenu précédemment, il est donné par la relation (3.16) et vérifie à la frontière noyau-manteau la condition (3.17).

5.1.1 Choix d'un champ dans le noyau

Il a été choisi de ne pas tenir compte du champ toroïdal dans le noyau, ce qui va conduire à des modèles de champ magnétique dans le noyau qui sont sous-estimés par rapport au cas géophysique.

La dépendance radiale du champ magnétique dans le noyau a été construite à partir des modes propres diffusifs du champ magnétique dans une sphère, solutions de l'équation de diffusion (3.10) où η est la diffusivité magnétique supposée uniforme. La dépendance radiale des coefficients du développement en harmoniques sphériques est une combinaison de fonctions de Bessel sphériques (cf Eq. (3.22)), où les fonctions de Bessel sphériques de deuxième espèce ne sont pas prises en compte. Si on impose aux fonctions de Bessel sphériques de satisfaire à la condition (3.17) à la frontière noyau-manteau (raccord avec un manteau isolant), on obtient les valeurs propres des fonctions de Bessel sphériques de première espèce via la relation

$$j_{l-1}(k_l c) = 0 \quad (5.1)$$

Les valeurs propres correspondent aux zéros des fonctions de Bessel sphériques d'ordre inférieur. Il y a une infinité de ces zéros, ce sont des valeurs dégénérées, dans le sens où elles ne dépendent pas de l'ordre m des harmoniques sphériques. On se restreint, dans les modèles de champ adoptés, aux premières valeurs propres, car ce sont ces modes propres qui diffusent le plus lentement. Par exemple, la première valeur possible pour l'ordre $l = 1$ est $k_1 c = \pi$ (cf Eq. (C.10)). Si $\eta = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $c = 3500 \text{ km}$, le temps caractéristique de diffusion est

$$\frac{c^2}{\pi^2 \eta} \sim 40\,000 \text{ ans} \quad (5.2)$$

Ainsi, pour les modèles de champ choisis dans le noyau, le champ poloidal s'écrit

$$P = a \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^{l+1} \frac{j_l(k_l r)}{j_l(k_l c)} \sum_{m=0}^l \left[\frac{g_l^m}{l} \cos(m\phi) + \frac{h_l^m}{l} \sin(m\phi) \right] P_l^m(\cos \theta) \quad (5.3)$$

que l'on peut comparer à son expression (3.16) dans le manteau isolant.

Contrairement à certains modèles de champ magnétique issus de simulations numériques, le champ associé à P est ainsi du même ordre de grandeur partout dans le noyau. Ce champ sera désormais appelé *champ principal* ou *champ dynamo*.

5.1.2 Vérification de la contrainte de Taylor

Dans cette partie, je vérifie que le modèle de champ magnétique adopté vérifie bien la contrainte de Taylor (3.57) pour avoir un modèle cohérent avec l'état de base des ondes de torsion.

Si on remarque que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\phi) = \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi}$$

pour le modèle de champ adopté, alors la force de Lorentz vue localement par les cylindres géostrophiques se réduit à

$$(\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi = -\frac{B_r}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \right] \quad (5.4)$$

les composantes B_r et B_ϕ étant données par les relations (D.10) et (D.12). En intégrant en ϕ la relation précédente, on obtient des termes qui ont la forme suivante

$$\oint d\phi \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^p m \left[g_l^m \sin(m\phi) - h_l^m \cos(m\phi) \right] \\ * \left[g_p^q \cos(q\phi) + h_p^q \sin(q\phi) \right] P_l^m P_p^q \\ = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\inf(l,p)} m \left[g_l^m h_p^m - h_l^m g_p^m \right] P_l^m P_p^m = 0$$

Les modèles de champ dans le noyau sont cohérents avec l'état de base des ondes de torsion.

5.2 Approche numérique de la propagation

Pour simuler la propagation de ces ondes magnétiques, plusieurs codes ont été développés. Ils sont caractérisés par

- * le modèle de champ interne : axisymétrique ou non
- * la présence ou non d'une graine
- * le nombre de dimensions : 1D, 2D (champ axisymétrique) ou 3D (pour traiter la perturbation externe du mécanisme d'excitation)
- * la résolution directe de l'équation d'onde (possible en l'absence de la graine seulement) ou non
- * une réponse impulsionnelle (pour une étude fréquentielle) du noyau ou un profil initial de vitesse

Ainsi quatre codes ont été développés.

5.2.1 Code 1D sans graine (GeD)

C'est un code que j'ai commencé à développer pendant mon DEA (2001-2002). Le modèle de champ magnétique interne au noyau est complet dans le sens où il contient les parties axisymétrique et non-axisymétrique de la partie poloïdale. Ce code résout directement l'équation d'onde ; il est dit 1D car l'équation d'onde ne dépend que de la variable d'espace s .

L'évolution temporelle d'une onde de torsion est obtenue à partir d'un profil initial. Pour cela, il faut connaître explicitement la distribution $\{B_s^2\}$ pour le modèle de champ adopté, ainsi que $\Psi(B_r^2)$.

5.2.2 Le champ principal dans l'équation d'onde

Fonction $\{B_s^2\}$

Connaissant les composantes B_r et B_θ , on peut calculer

$$sB_s = r[(1 - (\cos \theta)^2) B_r + \cos \theta \sin \theta B_\theta]$$

L'argument $u_l = k_l r$ (les valeurs propres k_l sont définies par la relation (5.1)) permet de définir la quantité X_l et on utilise la notation ΔP_l^m qui permet de calculer la dérivée par rapport à θ pour la composante B_θ

$$X_l = j_l(u_l) + u_l \frac{dj_l}{du_l}$$

$$\Delta P_l^m = \sqrt{(l+1-m)(l+1+m)} P_{l+1}^m - \cos \theta (l+1) P_l^m$$

Ceci permet de définir quatre fonctions

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_1^m(r, \theta) \\ V_1^m(r, \theta) \end{bmatrix} &= \sum_{l=m}^{l^*} \left(\frac{a}{c}\right)^{l+1} (l+1) \frac{j_l(u_l)}{j_l(k_l c)} \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \tilde{P}_l^m(\cos \theta) \\ \begin{bmatrix} U_2^m(r, \theta) \\ V_2^m(r, \theta) \end{bmatrix} &= \sum_{l=m}^{l^*} \left(\frac{a}{c}\right)^{l+1} \frac{X_l}{l j_l(k_l c)} \begin{bmatrix} g_l^m \\ h_l^m \end{bmatrix} \Delta \tilde{P}_l^m(\cos \theta) \end{aligned}$$

Les fonctions \tilde{P}_l^m sont définies en (A.1). Elles permettent de prendre en compte directement le cas $m = 0$ dans l'intégration en ϕ dans le calcul de $\{B_s^2\}$. On peut alors exprimer explicitement l'intégrale

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{\pi} \oint B_s^2 d\phi &= a^2 \left[(1 - (\cos \theta)^2)^2 \sum_{m=0}^{l^*} [(U_1^m)^2 + (V_1^m)^2] \right. \\ &\quad \left. + (\cos \theta)^2 \sum_{m=0}^{l^*} [(U_2^m)^2 + (V_2^m)^2] \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \theta (1 - (\cos \theta)^2) \sum_{m=0}^{l^*} [U_1^m U_2^m + V_1^m V_2^m] \right] \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer numériquement en z et à modifier quelques pré-facteurs pour avoir

$$\{B_s^2\} = \frac{1}{4\pi z_T} \int_{-z_T}^{z_T} \oint B_s^2 d\phi dz \quad (5.5)$$

où z_T représente la demi-hauteur d'un cylindre géostrophique (cf Fig. 4.5). Le choix du degré de troncature du développement l^* est fixé par les essais de convergence représentés sur la Fig. 5.1. Il est fixé à $l^* = 8$ par la suite.

La figure 5.2 montre la quantité $\{B_s^2\}(s)$ obtenue dans le cas d'un noyau avec et sans graine.

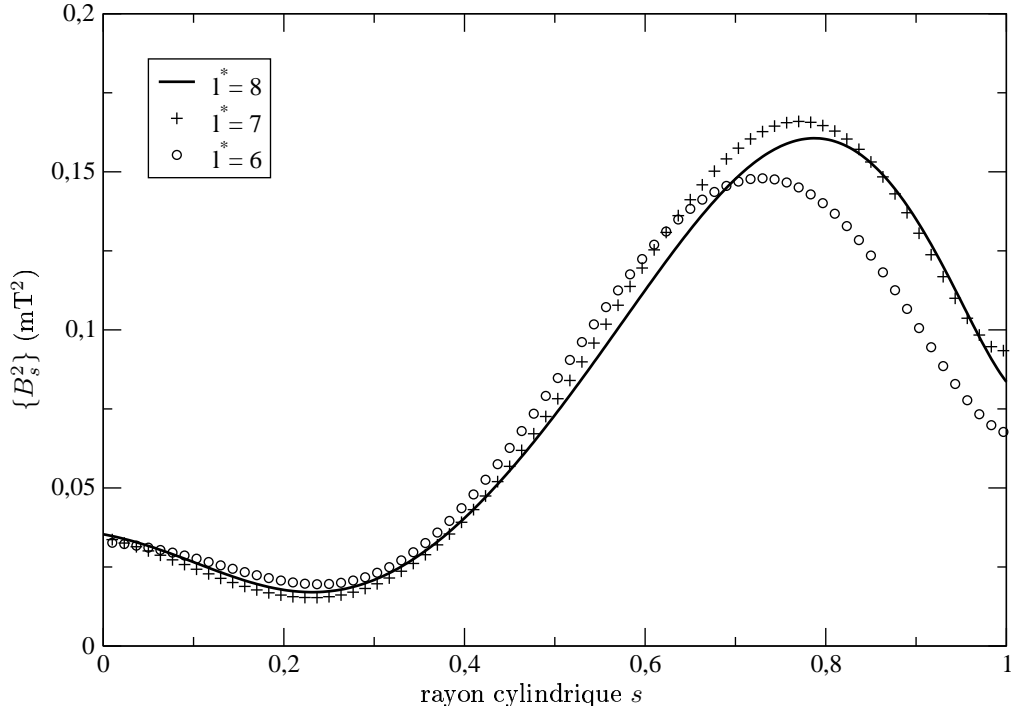


FIG. 5.1: Convergence de la fonction $\{B_s^2\}(s)$ (en mT^2) en fonction du degré de troncature l^* du développement en harmoniques sphériques. Le degré $l^* = 8$ est choisi par la suite. En abscisse, le rayon cylindrique s .

Fonction $\Psi(B_r^2)$

Un calcul direct donne

$$\frac{1}{\pi} \oint B_r^2 d\phi = \sum_{l,q=1}^{l^*} \sum_{m=0}^l (l+1) \left(\frac{a}{c}\right)^{l+2} \frac{j_l(k_l r)}{j_l(k_l c)} (q+1) \left(\frac{a}{c}\right)^{q+2} \frac{j_q(k_q r)}{j_q(k_q c)} \\ * (g_l^m g_q^m + h_l^m h_q^m) \tilde{P}_l^m(\cos \theta) \tilde{P}_q^m(\cos \theta)$$

Pour un CG donné, s est donné donc l'angle θ est fixé. L'intégrale précédente ne dépend plus alors que de la hauteur z à travers $r = \sqrt{(s^2 + z^2)}$, d'où

$$\Psi(B_r^2) = \frac{1}{\pi} \oint (B_r^2(+z_T) + B_r^2(-z_T)) d\phi$$

Une quantité $\Psi(X)$ représente la somme de l'intégrale de X en ϕ prise en haut et en bas d'un CG.

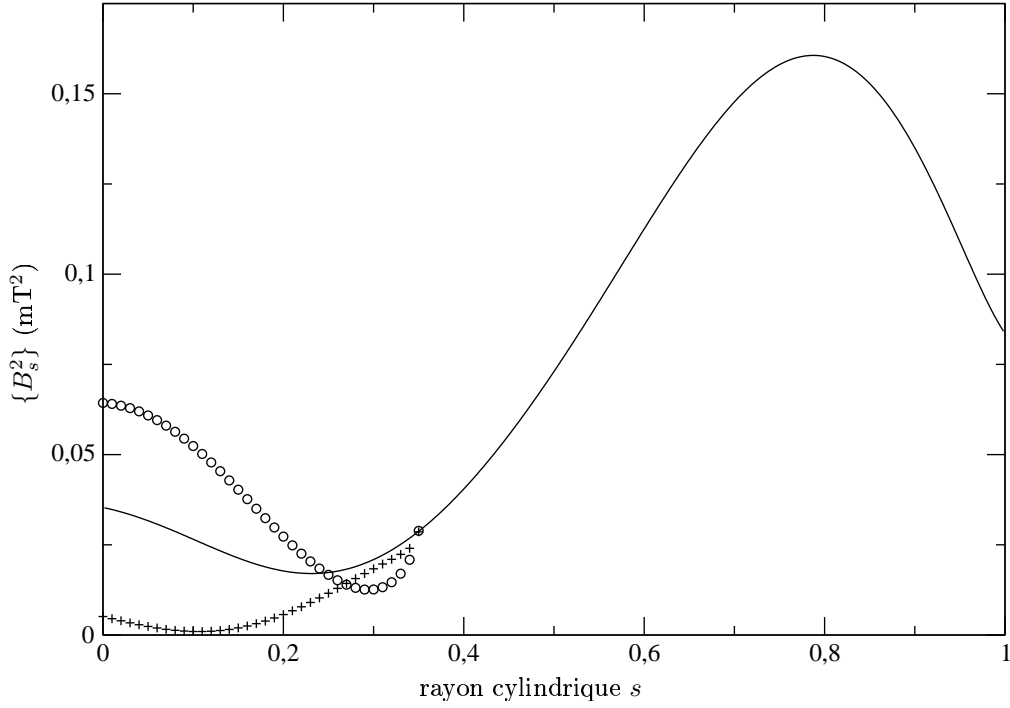


FIG. 5.2: Fonction $\{B_s^2\}(s)$ (en mT^2) en fonction du rayon cylindrique s obtenue à partir des coefficients publiés dans [Backus *et al.*, 1996, p 139] du modèle MGST de 1980 pour un noyau sans graine (trait plein) et pour un noyau avec graine (hémisphères nord (croix) et sud (cercle)).

Variation séculaire due aux ondes de torsion

La composante radiale de (4.18) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_r}{\partial t} = \sum_{m=0}^{l^*} \left[m \sin(m\phi) \sum_{l=m}^{l^*} (l+1) \left(\frac{c}{a}\right)^{l+2} g_l^m \omega_g(\sin \theta) P_l^m(\cos \theta) \right. \\ \left. - m \cos(m\phi) \sum_{l=m}^{l^*} (l+1) \left(\frac{c}{a}\right)^{l+2} h_l^m \omega_g(\sin \theta) P_l^m(\cos \theta) \right] \end{aligned}$$

Aucun champ magnétique zonal n'est induit par les ondes de torsion. On projette sur la sphère ($r = c$) pour obtenir une nouvelle combinaison linéaire de fonctions associées de Legendre, dont les coefficients sont notés $(\hat{u}_l^m, \hat{v}_l^m)$, ainsi

$$\sum_{l=m}^{l^*} (l+1) \left(\frac{c}{a}\right)^{l+2} g_l^m \omega_g(\sin \theta) P_l^m(\cos \theta) = \sum_{l=m}^{l^\odot} (l+1) \hat{u}_l^m P_l^m(\cos \theta) \quad (5.6)$$

$$\sum_{l=m}^{l^*} (l+1) \left(\frac{c}{a}\right)^{l+2} h_l^m \omega_g(\sin \theta) P_l^m(\cos \theta) = \sum_{l=m}^{l^\odot} (l+1) \hat{v}_l^m P_l^m(\cos \theta) \quad (5.7)$$

où les nouveaux coefficients sont donnés par

$$\begin{aligned} (l+1) \left(\frac{c}{a}\right)^{l+2} \hat{u}_l^m &= \frac{2l+1}{4} \int_{-1}^1 dx P_l^m(x) \\ &\quad * \left\{ \sum_{k=m}^{l^*} (k+1) \left(\frac{c}{a}\right)^{k+2} g_k^m \omega_g(\sqrt{1-x^2}) P_k^m(x) \right\} \\ (l+1) \left(\frac{c}{a}\right)^{l+2} \hat{v}_l^m &= \frac{2l+1}{4} \int_{-1}^1 dx P_l^m(x) \\ &\quad * \left\{ \sum_{k=m}^{l^*} (k+1) \left(\frac{c}{a}\right)^{k+2} h_k^m \omega_g(\sqrt{1-x^2}) P_k^m(x) \right\} \end{aligned}$$

Les deux formules ci-dessus ne sont valables que dans le cas où $m \neq 0$ (Pour le cas $m = 0$, il faudrait changer le facteur 4 des deux formules ci-dessus par un facteur 2). On pourra remarquer que les ondes de torsion n'induisent rien sur les termes zonaux dans le manteau. Numériquement, les intégrations sont faites par points de Gauss. On obtient alors à la frontière noyau-manteau

$$\frac{\partial b_r}{\partial t} = \sum_{l=1}^{l^\odot} (l+1) \sum_{m=0}^l (\dot{u}_l^m \cos(m\phi) + \dot{v}_l^m \sin(m\phi)) P_l^m(\cos \theta)$$

où les coefficients $(\dot{u}_l^m, \dot{v}_l^m)$ sont déterminés par

$$\begin{aligned} \dot{u}_l^m &= -m \hat{v}_l^m \\ \dot{v}_l^m &= -m \hat{u}_l^m \end{aligned}$$

Ces coefficients ont un ordre m maximum égal à l^* . Le degré de troncature l^\odot est fixé de manière à permettre une représentation correcte de l'onde $\omega_g(s, t)$, c'est à dire assurer les égalités (5.6) et (5.7). Une valeur typique est $l^\odot = 160$.

Connaissant le développement de \dot{b}_r dans le manteau isolant, le potentiel magnétique est aussi connu, ainsi que \dot{b}_θ et \dot{b}_ϕ . La variation séculaire due aux ondes de torsion est remontée alors à la surface de la Terre dans les observatoires.

On peut de même connaître le champ magnétique induit par la propagation des ondes de torsion en intégrant en temps la variation séculaire obtenue, avec des conditions initiales sur $u_l^m(0)$ et $v_l^m(0)$ cohérentes avec le profil initial choisi.

5.2.3 Résolution de l'équation d'onde

Pour résoudre l'équation d'onde (4.31), on se ramène à deux équations du premier ordre en temps (l'influence de la couche d'Ekman n'a pas été prise en compte)

$$\frac{\partial \omega_g}{\partial t} = \frac{1}{s^3 z_T} \frac{\partial \tau}{\partial s} - \frac{1}{z_T^2} \Psi(\Sigma B_r^2) \omega_g \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = s^3 z_T \{B_s^2\} \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \quad (5.9)$$

avec

$$\Sigma = \frac{\sigma_m \Delta \Omega t^*}{\sigma_c c} \frac{1}{4} \quad (5.10)$$

Ces équations sont présentées ici sous leur forme adimensionnée. Le temps t^* contenu dans l'expression Σ est déterminé par

$$t^* = \frac{c}{v_0} \quad v_0 = \sqrt{\frac{B_0^2}{\rho \mu_0}} \quad B_0^2 = \frac{\Omega \rho}{\sigma_c}$$

où la valeur caractéristique du champ dynamo B_0 est construite en supposant que la force de Coriolis est du même ordre de grandeur que la force de Lorentz (le nombre d'Elsasser est alors unitaire), ce qui est raisonnable pour le champ dynamo. Les applications numériques donnent $B_0 = 1.35 \text{ mT}$, $v_0 = 12.03 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ et $t^* = 9.23 \text{ ans}$ pour $\sigma_c = 4 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$, $\rho = 10^4 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\Omega = 2\pi/86400 \text{ rad.s}^{-1}$.

Ainsi, l'unité de longueur est le rayon c du noyau, l'unité de temps est t^* et l'unité de champ magnétique B_0 .

On pourra remarquer que l'équation (5.8) peut aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} (s^3 z_T \omega_g) = \dots$$

qui est une équation d'évolution de la densité de moment cinétique de l'onde

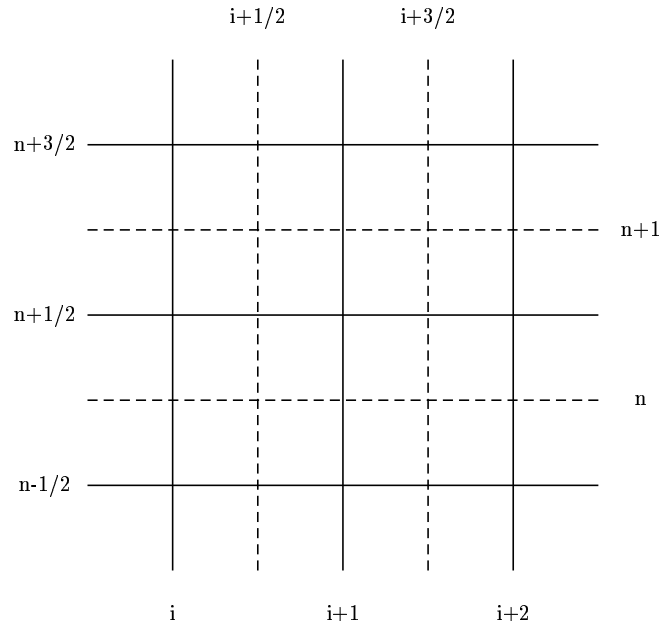


FIG. 5.3: Schéma espace-temps des grilles utilisées pour résoudre l'équation différentielle.

On résout le système du premier ordre (5.8)-(5.9) en utilisant les grilles schématisées sur la Fig. 5.3. Il s'agit de deux grilles décalées l'une par rapport à l'autre en espace et en temps.

L'indice n est relatif au temps t , tandis que l'indice i est relatif à la coordonnée s

$$t = n \Delta_t$$

$$s = i \Delta_s \quad \text{avec} \quad \Delta_s = \frac{1}{N}$$

où N est le nombre de CG utilisés. Chacune des deux fonctions ω_g et τ évolue sur sa propre grille. Cette méthode a été appliquée aux ondes sismiques par Virieux [1986]. τ évolue sur la grille $(n + 1/2, i)$ parce que les conditions aux limites (cf section (4.6.4)) s'expriment sur $\partial \omega_g / \partial s$

$$\tau \Big|_i^{n+1/2} = \tau \Big|_i^{n-1/2} + s^3 z_T \{B_s^2\}(s) \frac{\Delta_t}{\Delta_s} \left(\omega_g \Big|_{i+1/2}^n - \omega_g \Big|_{i-1/2}^n \right)$$

avec la condition initiale

$$\forall i, \quad \tau \Big|_i^{-1/2} = 0$$

Il faut rajouter les conditions initiales, détaillées à la section 4.6.4 suivant la nature axisymétrique ou non du champ magnétique utilisé. La longueur caractéristique étant le rayon du noyau c , la hauteur adimensionnée d'un CG est $z_T = \sqrt{1 - s^2}$. Quant à la vitesse angulaire géostrophique ω_g , elle évolue sur la grille $(n, i + 1/2)$

$$\omega_g \Big|_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{1 + \zeta} \left[(1 - \zeta) \omega_g \Big|_{i+1/2}^n + \frac{1}{s^3 z_T} \frac{\Delta_t}{\Delta_s} \left(\tau \Big|_{i+1}^{n+1/2} - \tau \Big|_i^{n+1/2} \right) \right]$$

avec la condition initiale

$$\forall i, \quad \omega_g \Big|_i^0 = \text{profil initial}$$

ce qui revient à se donner la longueur d'onde. Le coefficient ζ est défini par

$$\zeta = \frac{\Sigma}{2z_T^2} \Psi(B_r^2) \Delta_t$$

5.2.4 Premiers résultats

Les résultats suivants correspondent au profil initial suivant

$$\omega_g(s, 0) = \sin(10s) e^{-10(s-0.7)^2} \quad (5.11)$$

Transformée de Fourier d'une onde de torsion

On se place en $s = 0.75c$ et on enregistre l'onde de torsion qui passe. La durée totale de l'enregistrement est de 1000 ans, pour un échantillonnage tous les 8.4 jours. Le signal obtenu est présenté sur la Fig. 5.4 et son spectre sur la Fig. 5.5. Une carte de propagation de cette onde est donnée Fig. 5.6a.

On peut remarquer que le modèle de champ magnétique adopté, interne au noyau, n'est pas un modèle de champ fort puisqu'il donne des périodes relativement petites pour les ondes de torsion, comparées à la période estimée par Braginsky [1970] d'une soixantaine d'années.

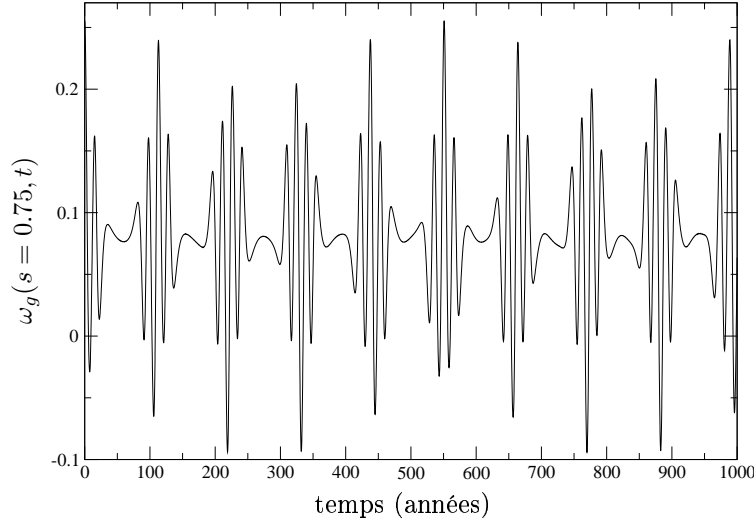


FIG. 5.4: Onde de torsion enregistrée en $s = 0.75c$ au cours du temps (en années).

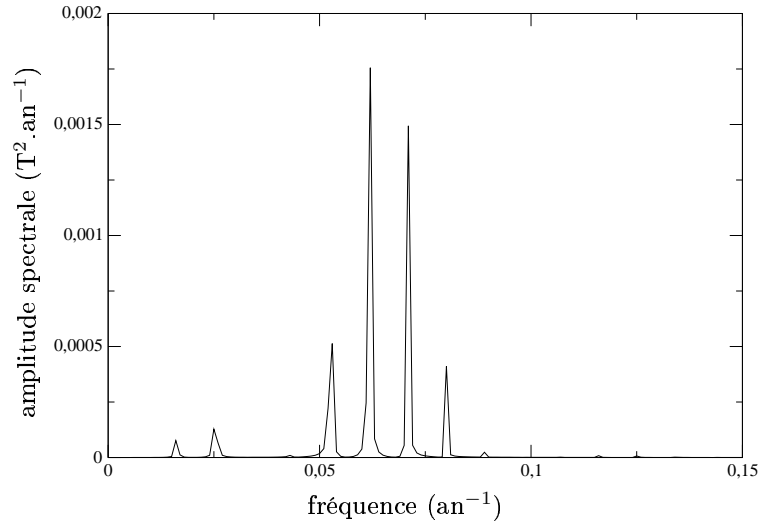


FIG. 5.5: Transformée de Fourier de l'onde de torsion présentée Fig. 5.4. En abscisse, la fréquence en an^{-1} (ordonnée adimensionnée). Le pic principal correspond à une période de 16.2 an.

5.2.5 Les codes OTsg et OTg

Ce sont deux codes différents, non seulement dans le sens où le code OTg prend la graine en compte, ce que ne fait pas le code OTsg, mais aussi dans la manière de traiter certaines parties du code : par exemple, dans OTsg, un développement sur une base de fonctions orthogonales est fait pour rendre compte de la dépendance en θ , l'angle des coordonnées sphériques, tandis que dans le code OTg, les calculs sont faits en différence finie. L'avantage d'avoir deux familles de codes relativement indépendantes l'une de l'autre est de pouvoir tester convenablement la propagation des ondes. Ces deux codes déterminent l'évolution temporelle d'un profil initial de la vitesse géostrophique.

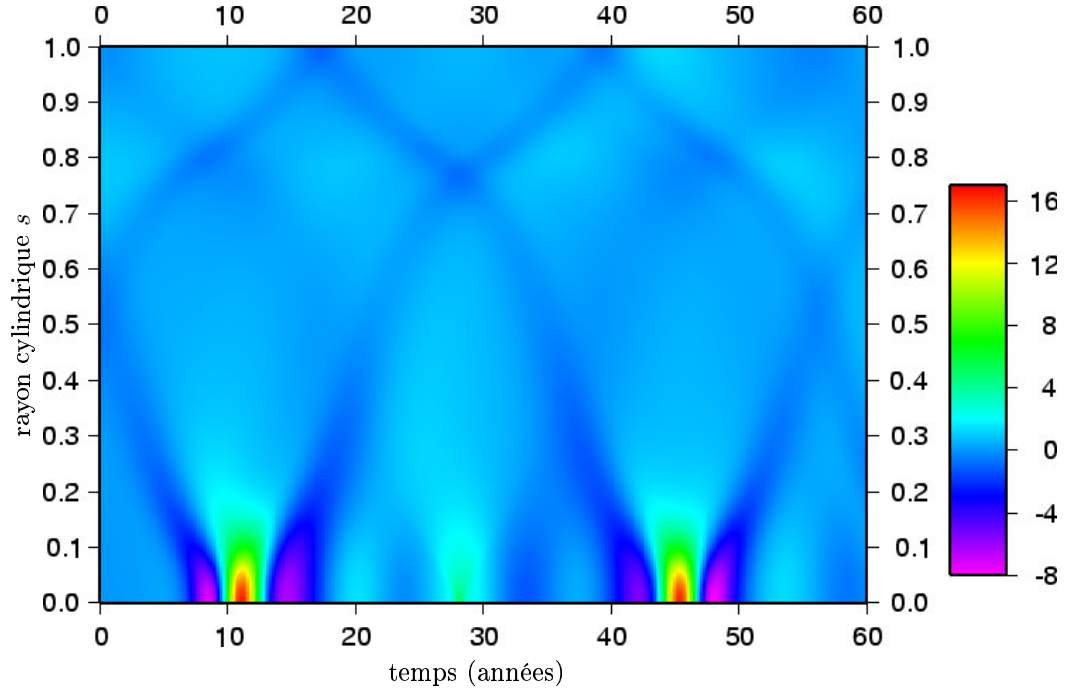
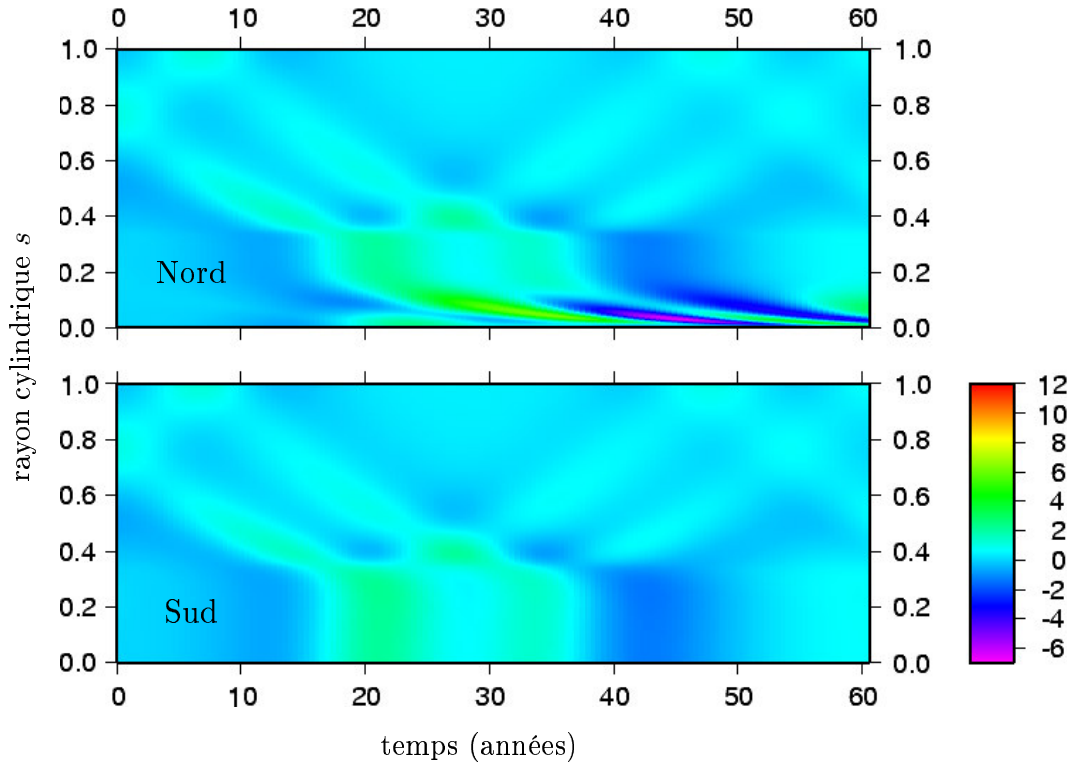
(a) *Sans graine*(b) *Avec graine*

FIG. 5.6: Propagation d'une onde de torsion dans tout le noyau (avec ou sans graine) au cours du temps (en années). L'échelle de couleur donne la valeur de l'amplitude de l'onde ω_g . Le même profil initial a été utilisé dans les deux cas. Dans le cas avec graine, la partie extérieure au cylindre tangent est la même dans les deux parties de l'image. Cette partie est complétée par la partie interne au cylindre tangent dans l'hémisphère précisé par *Nord* ou *Sud*.

Ces codes ne résolvent pas directement l'équation d'onde (4.31), mais les deux équations couplées (4.16) et (4.18). On n'a donc pas besoin de connaître explicitement $\{B_s^2\}$ ainsi que les autres quantités faisant intervenir le champ dynamo. Par contre, les moyennes intégrées sur les CG doivent être construites numériquement, ce qui est la principale difficulté numérique. La dernière différence avec le code GeD, concerne le champ magnétique : dans ces trois codes, il est axisymétrique. Cependant, les termes non-zonaux peuvent être représentés par des termes zonaux sauf près de l'axe (cf section 5.3).

Le temps est mis à l'échelle comme $(2\Omega)^{-1}$ et le champ magnétique comme $2\Omega c\sqrt{\rho\mu_0}$. Avec ces mises à l'échelle, l'équation d'évolution de la vitesse géostrophique (4.16) devient

$$R_0 \frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{1}{4\pi z_T} \int_{-z_T}^{z_T} \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi dz \quad (5.12)$$

L'équation de l'induction (4.18) est

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \mathbf{rot} \left(u_g \vec{e}_\phi \wedge \vec{B} \right) + R_0 \Delta \vec{b} \quad (5.13)$$

Le champ magnétique \vec{B} se décompose en une partie *dynamo* et une partie perturbative \vec{b} qui sont toutes les deux axisymétriques. Le champ dynamo est supposé constant sur plusieurs périodes des ondes de torsion. Dans cette dernière équation, $R_0 = \eta/(2\Omega c)$. La diffusion en volume est négligeable sur l'échelle de temps des ondes de torsion. Elle n'intervient de façon significative que dans les couches limites. Chacun de ces deux champs magnétiques est décomposé en ses parties poloïdale et toroïdale à partir de la relation (D.2), lesquelles sont développées sur la base des harmoniques sphériques. Le produit $u_g \vec{e}_\phi \wedge \vec{B}$ est calculé dans l'espace physique. Comme $\text{div}(u_g \vec{e}_\phi \wedge \vec{B}) \neq 0$, le vecteur $u_g \vec{e}_\phi \wedge \vec{B}$ est décomposé en ses parties poloïdale, toroïdale et sphéroïdale, lesquelles sont développées sur la base des harmoniques généralisées puis le rotationnel $\mathbf{rot} \left(u_g \vec{e}_\phi \wedge \vec{B} \right)$ est calculé dans l'espace spectral. Les calculs dans l'espace réel sont faits en différence finie.

Les conditions aux limites sur la vitesse géostrophique ont été vues à la section 4.6.4. En ce qui concerne le champ magnétique, il se raccorde à un manteau isolant : sa partie toroïdale est nulle à la frontière noyau-manteau et sa partie poloïdale vérifie (3.17).

Connaissant la vitesse géostrophique au temps t , on la détermine au temps $t + 1$ par (5.12). Une moyenne des deux valeurs donne la vitesse géostrophique au temps $t + 1/2$ qui permet de calculer le produit vectoriel $u_g \vec{e}_\phi \wedge \vec{B}$, pour obtenir le champ magnétique au temps $t + 1$.

La grille radiale n'est pas régulière pour permettre de résoudre correctement les couches limites. Le calcul de la vitesse géostrophique, c'est à dire l'intégration sur la hauteur du CG, est la difficulté majeure. La fonction $(\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi$, intégrée en ϕ , est exprimée comme une fonction des variables s et z/z_T . Cette dernière variable varie alors entre -1 et 1. Pour un cylindre géostrophique donné (s fixé), la fonction $(\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi$ intégrée en ϕ est développée sur des polynômes de Legendre

$$f \left(s, \frac{z}{z_T} \right) = \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi = \sum_{n=0}^N c_n(s) P_n^0 \left(\frac{z}{z_T} \right)$$

avec un nombre de coefficients N variant avec la hauteur d'un cylindre géostrophique. Une fois connu le développement, l'intégrale sur la hauteur se fait par points de Gauss [Jault et Cardin, 1999].

Le champ magnétique est développé suivant la relation (D.2) : le champ dynamo imposé est décrit par le terme $\mathbf{rot}(\alpha \vec{e}_\phi)$ et le champ perturbatif est décrit par $\beta \vec{e}_\phi$, parce que le champ magnétique dynamo, sous l'action d'un champ de vitesse géostrophique, ne produit que du champ poloïdal. La perturbation est connue dans l'espace physique $\beta(r_i, \theta_j)$. Pour calculer la vitesse géostrophique, c'est à dire intégrer suivant la hauteur, la perturbation est interpolée aux points de Gauss à partir des plus proches voisins dans le code OTg.

Dans le code OTsg, seule la partie symétrique par rapport à l'équateur de la force de Lorentz contribue à accélérer les cylindres géostrophiques. On peut donc exprimer la vitesse géostrophique en fonction de la partie symétrique de la fonction $f(s, z/z_T)$

$$\frac{1}{2} \left(f\left(s, \frac{z}{z_T}\right) + f\left(s, -\frac{z}{z_T}\right) \right) \quad (5.14)$$

Prise en compte de la graine

La prise en compte de la graine – de rayon $r = b$ – dans le code OTg est décrite dans [Jault, 1996]. A l'intérieur du cylindre tangent, comme le champ magnétique dynamo n'est pas symétrique par rapport au plan équatorial, la moyenne $\{B_s^2\}$ n'est pas la même dans l'hémisphère nord et dans l'hémisphère sud. Dans l'hémisphère nord,

$$\{B_s^2\}^+(s) = \frac{1}{2\pi h} \int_{z_B}^{z_T} \oint B_s^2 d\phi ds$$

et dans l'hémisphère sud

$$\{B_s^2\}^-(s) = \frac{1}{2\pi h} \int_{-z_B}^{-z_T} \oint B_s^2 d\phi ds$$

avec $z_B = \sqrt{b^2 - s^2}$, $z_T = \sqrt{c^2 - s^2}$ et $h = z_T - z_B$. La vitesse géostrophique évolue donc différemment dans chaque hémisphère

$$u_g = s \omega_g^\pm \quad \text{pour } s \leq b \text{ et } \pm z \geq 0$$

Il y a une première singularité en $s = b$ parce que la hauteur des CG change rapidement à la traversée du cylindre tangent (cf Fig. (5.10)). Au même endroit, une autre singularité se développe, puisque (5.12) change de part et d'autre du cylindre tangent. Cette singularité est présente parce que la viscosité du fer a été négligée dans le coeur du noyau. Cela crée une nappe de courants à la surface du cylindre tangent et la vitesse géostrophique est singulière au cylindre tangent

$$\eta \left(\left. \frac{\partial b_\phi}{\partial s} \right|_{s=b^+} - \left. \frac{\partial b_\phi}{\partial s} \right|_{s=b^-} \right) = -b[\omega_g(b^+) - \omega_g(b^-)]B_s$$

Une singularité du même type est présente à la surface de la graine

$$\eta \left(\frac{\partial b_\phi}{\partial r} \Big|_{r=b^+} - \frac{\partial b_\phi}{\partial r} \Big|_{r=b^-} \right) = -s[\omega_g(s) - \omega_{\text{graine}}]B_r$$

où $s\omega_{\text{graine}}$ est la vitesse de rotation de la graine et η est la diffusivité magnétique. Une même conductivité a été supposée pour le noyau et pour la graine. Numériquement, il est observé que la discontinuité de la vitesse géostrophique tend à disparaître lorsque la résolution augmente.

A l'intérieur du cylindre tangent, la partie de la force de Lorentz non symétrique par rapport au plan équatorial contribue à l'accélération des cylindres géostrophiques, puisque que l'intégration sur la hauteur d'un CG a changé :

$$\frac{1}{2} \left(f \left(s, \frac{z}{z_T} \right) - f \left(s, -\frac{z}{z_T} \right) \right)$$

Connaissant les parties symétrique (g,s) et anti-symétrique ($u_{g,a}$) de la vitesse, dans l'hémisphère Nord, la vitesse géostrophique est alors

$$u_{g,\text{Nord}} = u_{g,s} + u_{g,a}$$

et dans l'hémisphère Sud,

$$u_{g,\text{Sud}} = u_{g,s} - u_{g,a}$$

En dehors du cylindre tangent, $u_{g,a} = 0$. Un exemple est donné Fig. 5.6b.

5.2.6 Diagnostics des codes

Plusieurs sortes de diagnostics sont été analysés. Les points suivants ont été vérifiés :

- * conservation du moment cinétique en l'absence de processus dissipatifs
- * conservation de l'énergie totale en l'absence de processus dissipatifs
- * benchmark du code Ged sur OTsg, dans le cas particulier où le champ dynamo de GeD était axisymétrique
- * benchmark des différents codes OTxx entre eux

5.3 Vers des codes OTxx non zonaux ...

Bien que les codes de type OTxx soient axisymétriques par construction, on peut les rapprocher du code non zonal GeD en prenant un modèle de champ dynamo axisymétrique approprié qui simulerait les effets des termes non zonaux.

L'influence des termes non zonaux se voit très bien sur $\{B_s^2\}$ (cf Fig. 5.7). La principale différence est la valeur prise à l'axe par la fonction $\{B_s^2\}$: dans le cas d'un champ axisymétrique, elle tends à s'annuler ; alors que ce n'est pas le cas lorsqu'il y a des termes non zonaux. Dans

cet exemple, la courbe zonale suit au plus près la courbe non zonale dans la partie du noyau proche de l'équateur. Le champ dynamo utilisé pour la partie zonale correspond au poloïdal

$$P = a \sum_{l=1}^4 (j_l(k_l r) + \alpha_l j_l(k'_l r)) g_l^0 P_l^0(\cos \theta) \quad (5.15)$$

où les coefficients α_l sont des constantes. Les coefficients k'_l sont des valeurs propres des fonctions de Bessel sphériques d'ordre $l-1$ qui correspondent au deuxième zéro de ces fonctions (les k_l correspondent au premier zéro). C'est une manière de complexifier le champ magnétique à l'intérieur du noyau.

On représente la quantité $\{B_s^2\}$ représentée Fig. (5.2), correspondant au champ poloïdal (5.3), par la quantité $\{B_s^2\}$ correspondant au champ poloïdal (5.15) loin de l'axe de rotation. Le résultat obtenu est présenté Fig. 5.7. Les valeurs des coefficients de (5.15) sont alors les suivantes

1	α_l	g_l^0 (μT)
1	-0.5	310.925
2	-0.3	179.303
3	0	-67.535
4	0	-19.097

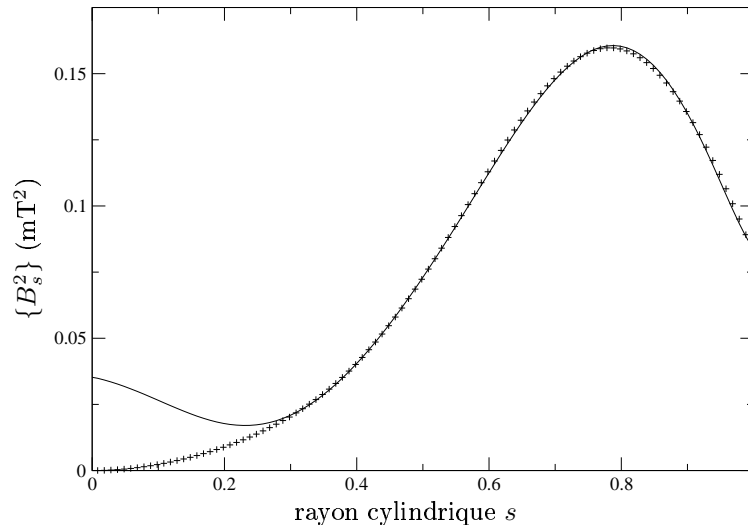


FIG. 5.7: Courbes $\{B_s^2\}$ (en mT^2) en fonction du rayon cylindrique s . Le champ dynamo est axisymétrique (+) ou il contient aussi les termes non zonaux (en trait plein, les coefficients sont ceux publiés dans [Backus *et al.*, 1996, p 139], $l^* = 8$).

La Fig. 5.8 présente une onde de torsion dans les deux cas de la Fig. 5.7 : en trait plein, le champ dynamo est axisymétrique, obtenu à partir des valeurs ci-dessus. Dans le second cas (+), le champ dynamo est non-axisymétrique. Dans le cas du champ dynamo axisymétrique, avec le profil initial choisi, comme $\{B_s^2\} \rightarrow 0$ vers l'axe, on a $\omega_g(s=0, t) = 0$ au cours de la propagation. Au cours de sa propagation vers l'axe, la vitesse de propagation de l'onde diminue pour s'annuler à l'axe ($\{B_s^2\} \rightarrow 0$). Ainsi, l'onde qui va arriver va créer des longueurs

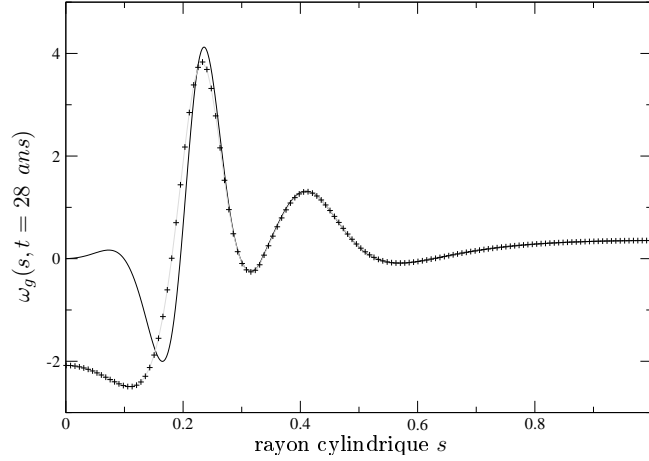


FIG. 5.8: Onde de torsion $\omega_g(s)$ au temps $t = 28$ ans en fonction du rayon cylindrique s avec un champ dynamo zonal (trait plein) ou non (+) correspondant aux valeurs de la Fig. 5.7.

d'onde toujours plus petites, jusqu'à ce que celle-ci devienne du même ordre de grandeur que la résolution spatiale, auquel cas le code « explose ». Cela arrive au bout d'une dizaine de période pour une résolution suffisamment élevée. C'est la principale limitation d'un champ dynamo axisymétrique. La même limitation se rencontre dans le code OTsg. La présence d'une graine modifie radicalement ce comportement, au point qu'il n'apparaît pas dans le code OTg.

5.4 Amplifications

Le mécanisme de propagation des ondes de torsion est décrit par les deux premiers termes de l'équation d'onde (4.31) qui décrivent le transport de la densité de moment cinétique $s^3 z_T \omega_g$. Aux bords du domaine, où s (à l'axe) ou z_T (à l'équateur) s'annulent, on peut s'attendre à une amplification de l'onde. Comme le terme s^3 tend plus vite vers zéro à l'axe que le terme z_T à l'équateur, on s'attend à une plus grande amplification à l'axe. Une illustration est présentée Fig. 5.9 où l'onde de torsion, enregistrée en $s = 0.75c$ sur la Fig. 5.4, a été représentée à différents temps en fonction du rayon s . Le profil initial (5.11) est en pointillé. Une autre illustration est donnée Fig. 5.6a.

Dans le cas terrestre, le couplage efficace entre la graine et l'onde dans les deux hémisphères peut contrer cette amplification.

La Fig. 2 de Zatman et Bloxham [1997] indique une amplification des mouvements géostrophiques à l'équateur ($z_T = 0$), laquelle est d'ailleurs sous-estimée par les conditions de régularisation utilisées dans leur inversion.

Enfin, on peut s'attendre à une troisième amplification liée à la hauteur $h(s)$ des cylindres

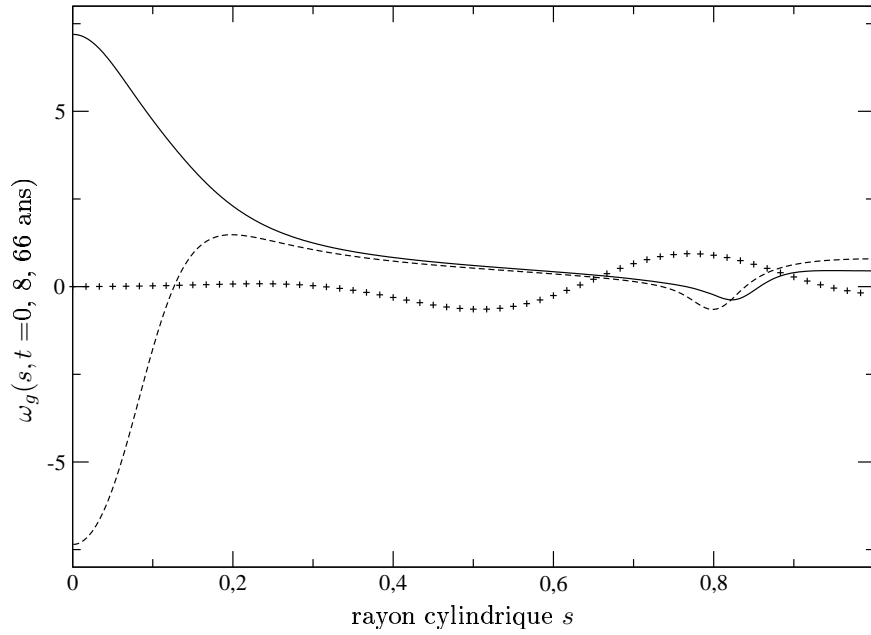


FIG. 5.9: Onde de torsion présentée Fig. 5.4 en fonction du rayon cylindrique s cette fois, au bout de 8 ans (pointillé) et 66 ans (trait plein). Profil initial (+).

géostrophiques de part et d'autre du cylindre tangent :

$$h(s) = \begin{cases} \sqrt{c^2 - s^2} - \sqrt{r_g^2 - s^2} & \text{si } s \leq r_g \\ 2\sqrt{c^2 - s^2} & \text{si } r_g \leq s \leq c \end{cases} \quad (5.16)$$

où r_g est le rayon de la graine ($r_g \sim 0.35c$). Cette hauteur $h(s)$ est représentée sur la Fig. (5.10). L'amplification au niveau de la graine est illustrée Fig. 5.11 et Fig. 5.6b.

5.5 A l'intérieur du cylindre tangent

La propagation d'ondes de torsion à l'intérieur du cylindre tangent est observée (cf Fig. 5.12). Les ondes ont tendance à se propager dans l'hémisphère où la valeur de $\{B_s^2\}$ est la plus faible. D'après la Fig. 5.2, c'est dans l'hémisphère Nord que les cylindres sont le moins reliés entre eux par le champ magnétique. C'est bien dans cet hémisphère que les ondes se propagent. L'onde de torsion arrivant de l'équateur vers le cylindre tangent aura tendance à passer dans l'hémisphère où l'inertie des cylindres géostrophiques est moindre, l'autre hémisphère étant quasiment en rotation solide (cf Fig. 5.6b).

Lorsque l'onde de torsion arrive à l'axe, elle peut être amplifiée (cf Fig. 5.12b) par conservation du moment cinétique.

Le traitement de la graine dans d'autres études est quelque peu différent. La symétrie par rapport au plan équatorial est imposée. Par conséquent, la même onde se propagera dans les

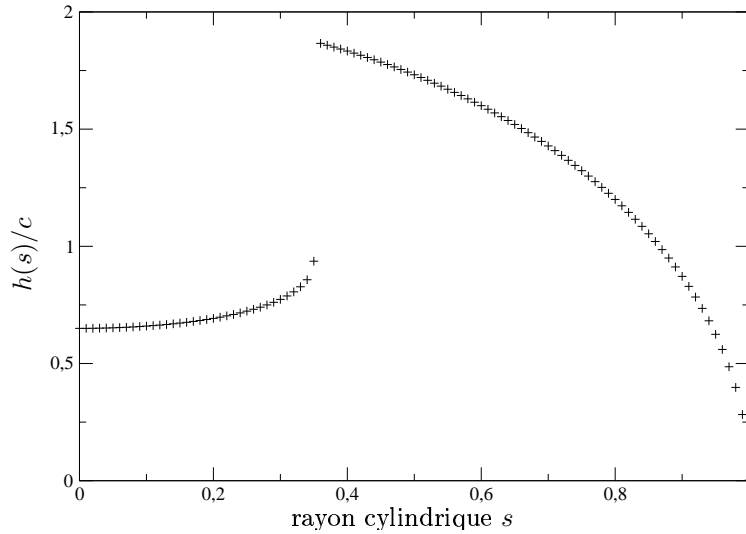


FIG. 5.10: Hauteur d'un cylindre géostrophique $h(s)/c$ en fonction du rayon cylindrique s en présence d'une graine de rayon $0.35c$.

deux hémisphères. Braginsky [1970] considère que le couplage entre la graine et le fluide à l'intérieur du cylindre tangent était suffisamment efficace pour que le fluide soit en rotation solide à la même vitesse que la graine : $\omega_g^\pm = \omega_{\text{graine}}$. Il résout l'équation d'onde (4.31) des ondes de torsion avec une condition au cylindre tangent sur ω_{graine} . [Zatman et Bloxham, 1997] ignorent l'intérieur du cylindre tangent et ne considèrent la propagation d'ondes de torsion qu'à l'extérieur du cylindre tangent. Buffett [1988] impose la continuité de ω_g au cylindre tangent et résout l'équation d'onde (4.31) séparément pour $s < b$ et $s > b$ (b est le rayon de la graine). Finalement Mound et Buffett [2003] supposent ω_g uniforme à l'intérieur du cylindre tangent, mais différente de la rotation de la graine ω_{graine} . L'évolution de l'onde est estimée à partir du couple électromagnétique total de la région interne au cylindre tangent, qui est relié à $d\omega_g/ds|_{s=b+}$.

Le modèle de champ dynamo utilisé dans ce travail est relativement faible au niveau de la graine : les modèles issus de simulation de la dynamo terrestre ont, en général, un champ magnétique dix fois plus fort à la graine. Le couplage électromagnétique du fluide avec la graine est alors bien plus efficace que dans le cas présent. Il est vraisemblable que les ondes seraient réfléchies sur le cylindre tangent, plutôt que transmises à l'intérieur.

5.6 Etude de la propagation en fonction de la conductivité du manteau

La présence d'une couche conductrice à la base du manteau influence fortement la propagation des ondes de torsion : le couplage électromagnétique noyau-manteau dissipe efficacement les ondes de torsion. La Fig. 5.13 montre le moment cinétique

$$L = \int_0^1 s^3 z_T \omega_g ds \quad (5.17)$$

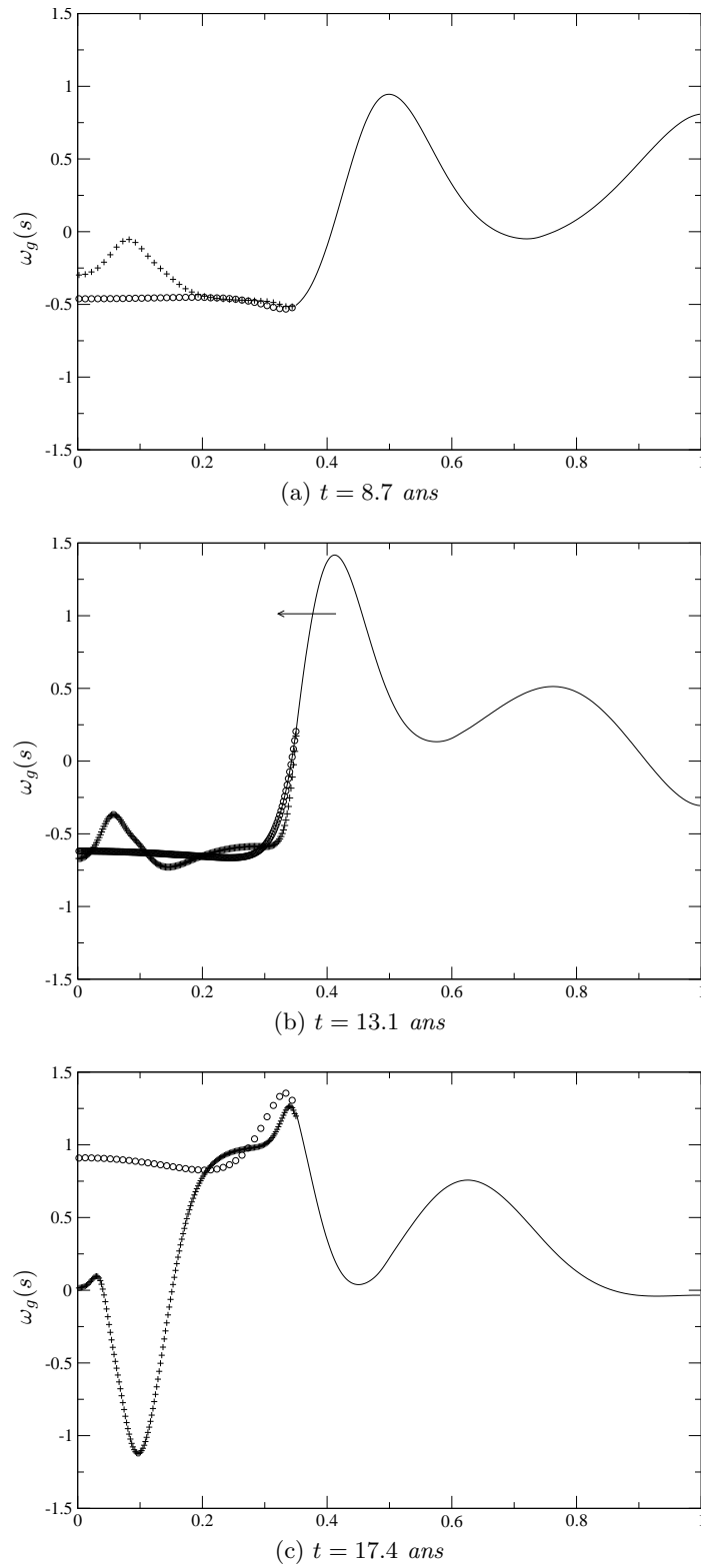


FIG. 5.11: Onde de torsion ω_g dans un noyau avec graine, à différents temps, en fonction du rayon cylindrique s , dans les hémisphères Nord (+) et Sud (o) pour le profil initial (5.11).. La flèche indique le sens de la propagation.

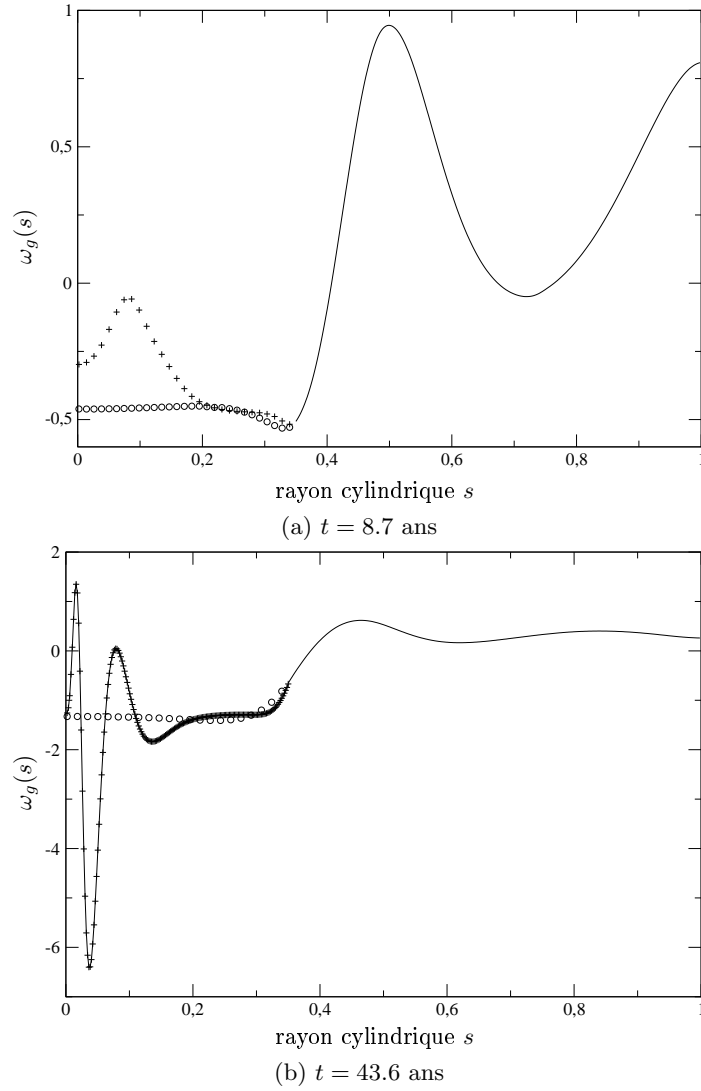


FIG. 5.12: Propagation à l'intérieur du cylindre tangent, dans les hémisphères Nord (+) et Sud (o) pour le profil initial (5.11). En abscisse, le rayon cylindrique s .

pour différentes valeurs de la conductance $\sigma_m \Delta$ de la couche conductrice à la base du manteau. Comme le moment cinétique initial dépend du profil initial de vitesse géostrophique, il a été normalisé à l'unité. Le moment cinétique ne tend vers zéro que pour des temps très long. Au bout d'une centaine d'années, les cylindres géostrophiques sont presque en rotation solide, laquelle tend à disparaître lentement au cours du temps. Les résultats obtenus sont cohérents avec l'étude du couple électromagnétique menée par Buffett [1988]. Une partie de l'énergie des ondes sert à entraîner la graine par couplage magnétique.

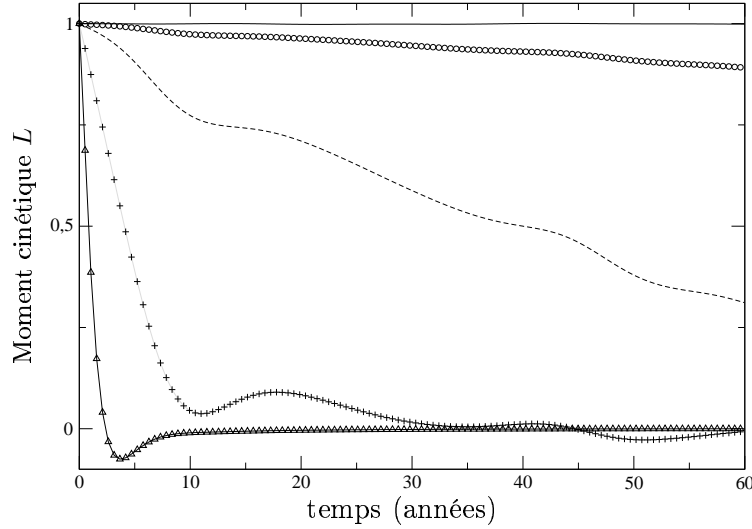


FIG. 5.13: Moment cinétique normalisé L à l'unité en l'absence de dissipation (trait plein) en fonction du temps (en années). La conductance $\sigma_m \Delta$ de la couche conductrice à la base du manteau est de $3.4 \cdot 10^6$ S (o), $3.4 \cdot 10^7$ S (pointillé), $3.4 \cdot 10^8$ S (+) et $3.4 \cdot 10^9$ S (Δ).

5.7 Variation séculaire due aux ondes de torsion

Dans le cas d'un manteau isolant, le champ magnétique induit par la propagation des ondes de torsion dans le noyau est décomposé en harmoniques sphériques à la frontière noyau-manteau puis remonté à la surface de la Terre dans les observatoires. La Fig. 5.14 présente la variation séculaire du champ dûe aux ondes de torsion pour les mêmes observatoires que dans l'étude de Bloxham *et al.* [2002]. Dans cette étude, il est montré que l'onde de torsion particulière étudiée par Bloxham *et al.* [2002] peut décrire la composante Y de la variation séculaire de CLF où il y a plusieurs secousses, tout en décrivant la composante Y de la variation séculaire de MCQ (île Macquarie) où il n'y a pas de secousses. Par contre, il n'est pas sûr que le champ de vitesse zonale précédent soit une onde de torsion.

Les résultats de Bloxham *et al.* [2002] ne sont pas retrouvés, d'une part parce que le profil initial est différent du leur, et d'autre part, parce que le modèle de champ magnétique dans le noyau est aussi différent du leur.

Les ondes de torsion n'induisent aucun champ magnétique zonal dans leur propagation. La Fig. 5.15 représente le spectre de la variation séculaire de la Fig. 5.14a, à un instant donné. La forme du spectre dépend beaucoup de l'endroit où l'onde est la plus significative dans le noyau.

5.8 Vers une inversion ...

L'équation d'onde des ondes de torsion (4.31)

$$s^3 z_T \frac{\partial^2 \omega_g}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(s^3 z_T \{B_s^2\} \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \right) - \frac{s^3}{z_T} \Psi(\Sigma B_r^2) \frac{\partial \omega_g}{\partial t}$$

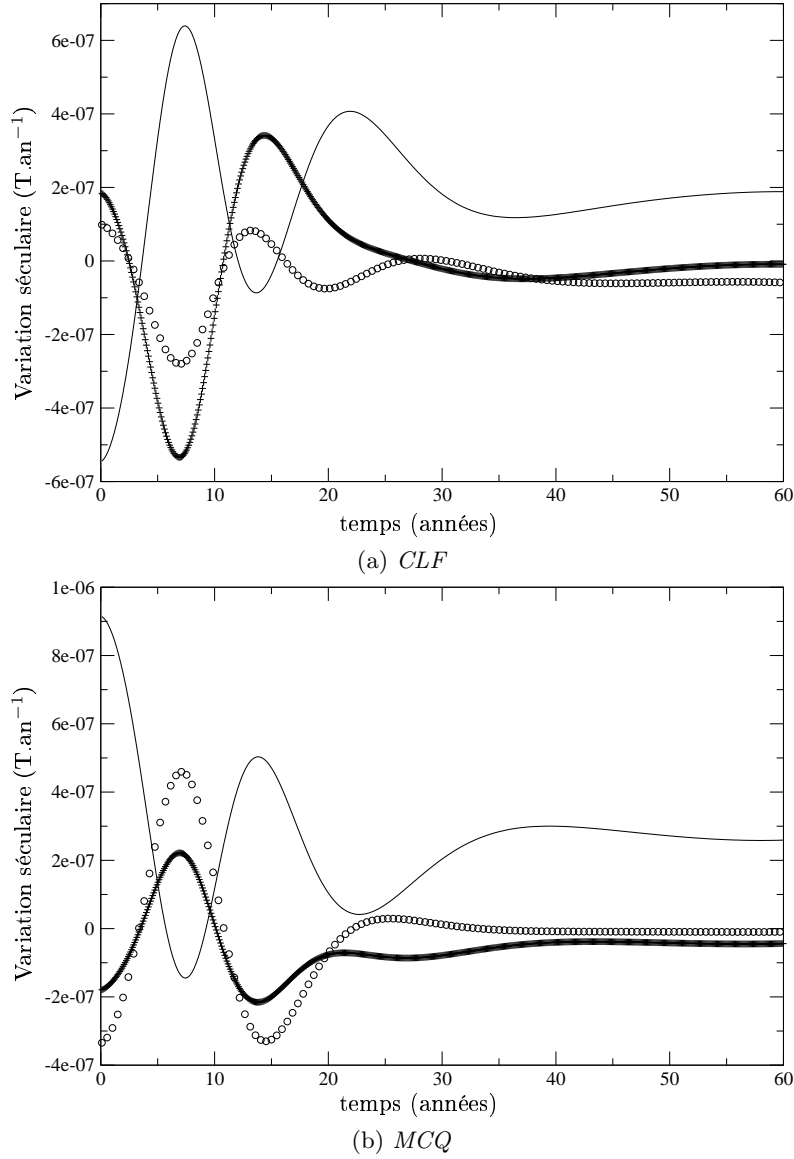


FIG. 5.14: Variation séculaire (T.an⁻¹) due aux ondes de torsion à Chambon-La-Forêt (CLF) et dans l'île Macquarie au cours du temps (en années) avec le profil initial (5.11). B_r (trait plein), B_θ (+) et B_ϕ (o).

peut être intégrée en vue d'essayer d'obtenir $\{B_s^2\}(s)$ dans le noyau et la conductivité du manteau via Σ (cf définition (5.10)). En intégrant, on obtient

$$\int_0^s s^3 z_T \frac{\partial^2 \omega_g}{\partial t^2} ds = \left[s^3 z_T \{B_s^2\} \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \right]_0^s - \int_0^s \frac{s^3}{z_T} \Psi(\Sigma B_r^2) \frac{\partial \omega_g}{\partial t} ds$$

avec la condition aux limites (4.33). Cette inversion est accompagnée de contraintes : la valeur de $\{B_s^2\}$ doit être positive et évoluée très lentement au cours d'un siècle, la valeur de $\Psi(\Sigma B_r^2)$ doit aussi être positive et relativement faible. On peut tester les contraintes sur $\{B_s^2\}$ facilement : un modèle de champ de vitesse à la surface du noyau (communication personnelle d'Alexandra Pais) permet d'évaluer à la fois la dérivée partielle de second ordre en temps de

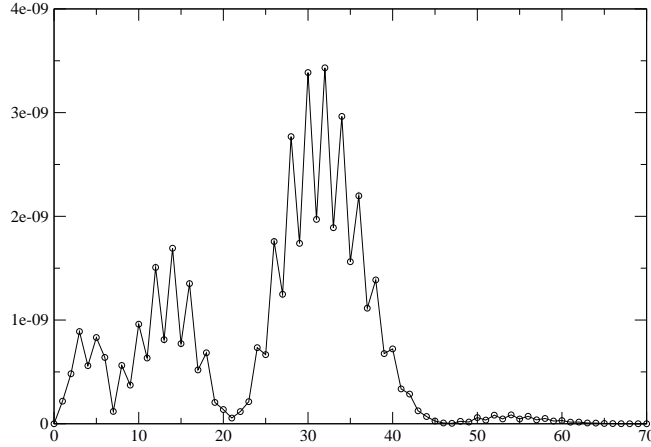


FIG. 5.15: Spectre (T^2) de la variation séculaire associée à une onde de torsion en fonction du degré l des harmoniques sphériques, après une évolution pendant 60 ans du profil initial (5.11). La forme du spectre varie au cours du temps.

la vitesse géostrophique ainsi que sa dérivée spatiale. On représente pour cela la quantité

$$s^3 z_T \frac{\partial \omega_g}{\partial s} \quad (5.18)$$

et la quantité

$$\int_0^s s^3 z_T \frac{\partial^2 \omega_g}{\partial t^2} ds \quad (5.19)$$

Pour avoir la quantité $\{B_s^2\}$ positive les deux quantités représentées sur la Fig. 5.16 doivent avoir le même signe. En 1970, les deux quantités ont un signe opposé (cf Fig. 5.16), tandis que cinq ans plus tard, c'est le contraire. De plus, la quantité $\{B_s^2\}$ doit évoluer lentement, car elle représente une partie du champ principal, qui devrait être relativement constant sur des échelles de temps aussi courtes.

Il serait intéressant de rajouter les variations de moment cinétique de la Terre dans cette inversion pour voir si la différence est toujours aussi grande (cf Eq. 4.31). Le fait que les deux quantités (5.18) et (5.19) soient de même signe pourrait être une contrainte dans les inversions de l'équation de la variation séculaire du champ magnétique

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{u}_H B_r)$$

qui permettent de remonter au champ de vitesse à la surface du noyau. À terme, de telles inversions devraient permettre de connaître la quantité $\{B_s^2\}(s)$ dans le noyau.

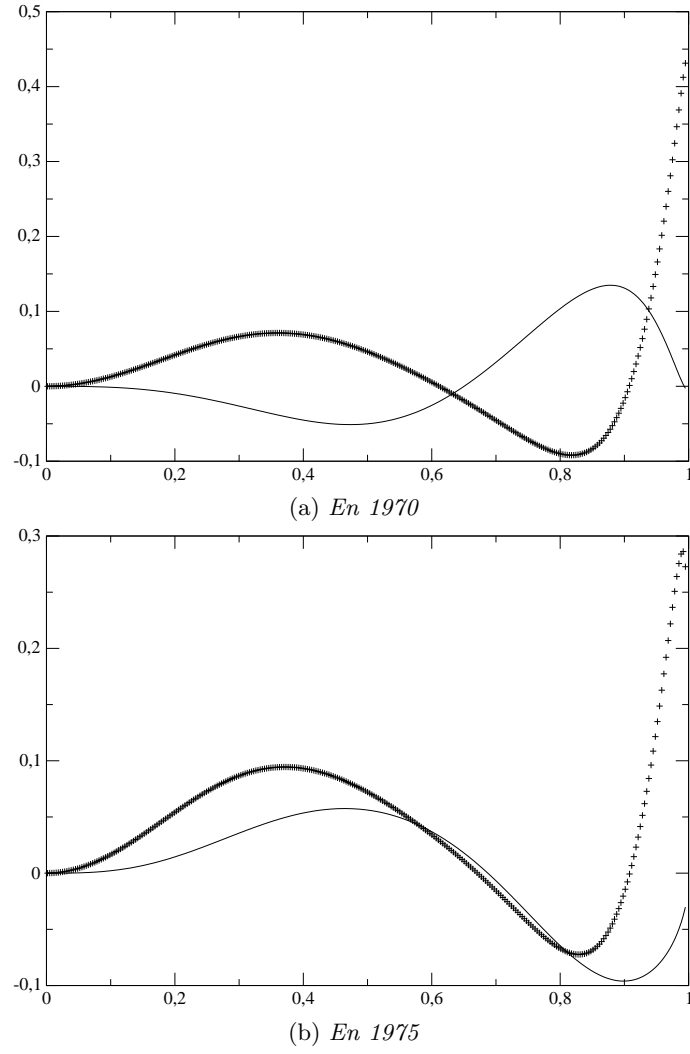


FIG. 5.16: Quantités $s^3 z_T \frac{\partial \omega_g}{\partial s}$ (+) et $\int_0^s s^3 z_T \frac{\partial^2 \omega_g}{\partial t^2} ds$ (trait plein) en fonction du rayon cylindrique s .

Troisième partie

Un mécanisme d'excitation
des ondes de torsion

Chapitre 6

Réponse du noyau à des systèmes de courants externes modulés par le cycle solaire

6.1 Les anneaux de courants externes

Comme on l’a vu à la section 1.3, il y a trois systèmes de courants qui se rebouclent en grande partie sur eux-mêmes malgré les différents couplages entre ces différents systèmes de courants. Il s’agit de l’électrojet équatorial, des anneaux auroraux conjugués et de l’anneau de courant magnétosphérique. Tous ces systèmes créent, plus ou moins localement, un champ magnétique à la surface de la Terre de l’ordre de 20 nT.

6.1.1 Modélisation d’un anneau de courant

Bien que l’anneau de courant magnétosphérique s’étende plus loin dans la direction opposée au soleil, ces trois systèmes de courant seront modélisés par une simple boucle de courant circulaire. On pourra trouver dans [Boteler *et al.*, 2000; Doumouya *et al.*, 2003] des améliorations de la boucle de courant, prenant en compte l’extension en latitude de l’électrojet équatorial, par exemple.

Le champ magnétique créé par une boucle de courant se calcule à partir de son potentiel vecteur [Jackson, 1975; Fujii et Schultz, 2002]

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

calculé au point M de coordonnées (r, θ, ϕ) . Ce point est pointé par le rayon vecteur \vec{r} . Les notations « prime » décrivent la distribution des courants, de densité $\vec{j}(\vec{r}')$. \vec{r}' est le rayon vecteur pointant sur la distribution de courants. L’intégrale porte sur l’espace entier. Les notations se retrouvent sur la Fig. 6.1.

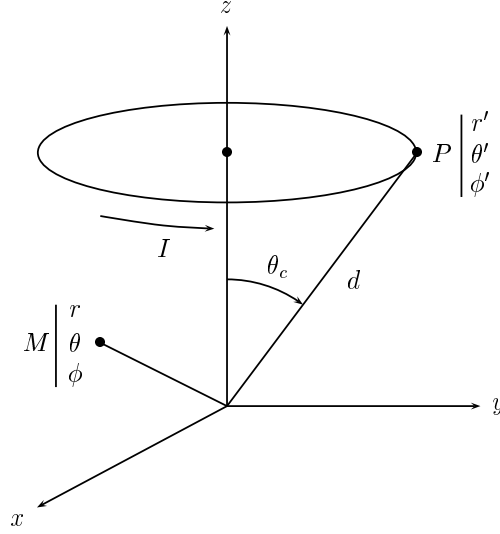


FIG. 6.1: Schéma et notations d'un anneau de courant.

Dans le référentiel magnétique (je garde la même terminologie que dans l'appendice B) dont l'axe vertical est aligné avec l'axe du dipôle magnétique, la boucle de courant est caractérisée par la distance $d = \|\vec{OP}\|$ et par le demi-angle au sommet θ_c . Comme la distribution des courants est zonale et invariante par rotation autour de l'axe vertical, il suffit de calculer la composante A_ϕ du potentiel vecteur :

$$A_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_\phi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \vec{e}_{\phi'} \cdot \vec{e}_\phi$$

La densité de courant décrivant l'anneau est

$$j_\phi = I \frac{\delta(r' - a)}{a} \delta(\theta' - \theta_c)$$

où la distribution $\delta(x)$ est la distribution de Dirac. L'intégration donne

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I d \sin \theta_c}{\pi \sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos(\theta + \theta_c)}} \frac{(2 - k^2)K(k) - 2E(k)}{k^2}$$

avec

$$k^2 = \frac{4dr \sin \theta \sin \theta_c}{r^2 + d^2 - 2dr \cos(\theta + \theta_c)}$$

Les fonctions $K(k)$ et $E(k)$ sont des intégrales elliptiques complètes, respectivement de première et deuxième espèce. L'intégrale elliptique complète de troisième espèce est notée $\Pi(x, k)$. Elle intervient dans le calcul des composantes du champ magnétique associé au potentiel vecteur \vec{A} .

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

$$\Pi(x, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(1 + x \sin^2 \psi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

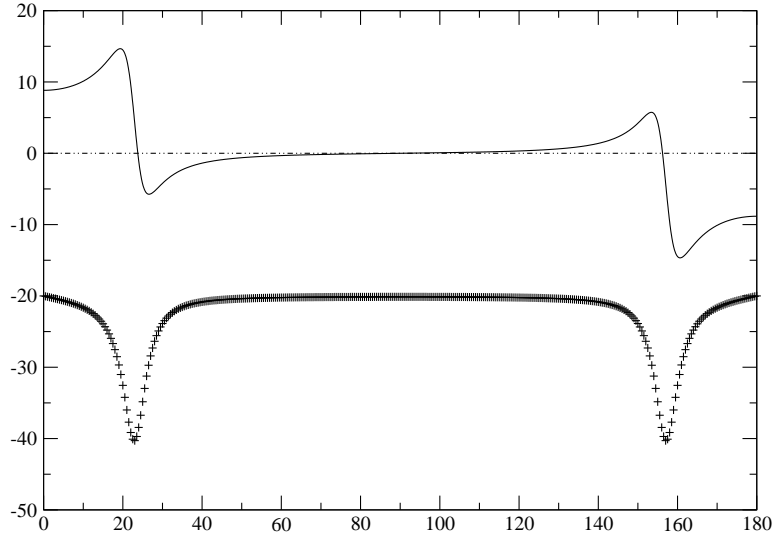


FIG. 6.2: Champ magnétique (en nT) en fonction de la colatitude ($^\circ$), créé par les anneaux auroraux conjugués : composante radiale (trait plein), orthoradiale (+) et azimutale (pointillé). La composante orthoradiale a été décalée de -20 nT pour une meilleure lecture.

Les composantes du champ magnétique s'expriment en fonction de deux combinaisons de ces fonctions

$$f(k) = (2 - k^2)K(k) - 2E(k)$$

$$g(k) = -2E(k) - k^2 K(k) + (2 - k^2)\Pi(-k^2, k)$$

Comme $\vec{b}_e = \mathbf{rot} \vec{A}$, on obtient le champ magnétique créé dans tout l'espace par une boucle de courant

$$b_{e,r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2 \sin \theta \sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos(\theta + \theta_c)}} \times \left(dr \sin(\theta + \theta_c) f(k) + \frac{(r^2 + d^2) \cos \theta - 2dr \cos \theta_c}{2 \sin \theta} g(k) \right)$$

$$b_{e,\theta} = \frac{-\mu_0 I}{4\pi r \sin \theta \sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos(\theta + \theta_c)}} \times \left((r - d \cos(\theta + \theta_c)) f(k) + \frac{(d^2 - r^2)}{2r} g(k) \right)$$

	I (A)	h (km)	θ_c (°)
électrojet équatorial	10 000	100	90
anneaux auroraux	37 000	400	23
anneau magnétosphérique	$1.2 \cdot 10^6$	$5a$	90

TAB. 6.1: Valeurs retenues pour les différents anneaux : l'intensité I , la hauteur h et le demi-angle au sommet θ_c (colatitude).

Pour finir de décrire ce champ, il faut connaître trois paramètres : l'intensité I de l'anneau, l'altitude h de l'anneau qui donne la distance caractéristique $d = a + h$, et le demi-angle au sommet θ_c (colatitude).

6.1.2 Comparaison des anneaux de courants

Les valeurs retenues de ces paramètres ont été déterminés de la manière suivante : la hauteur h et l'angle θ_c ont été déterminés par [Fujii et Schultz, 2002] pour les anneaux auroraux. Pour les deux autres anneaux, un angle $\theta_c = 90^\circ$ a été retenu. Une hauteur h de 100 km a été choisi pour l'électrojet équatorial, à partir des profils de conductivité en fonction de l'altitude à l'équateur (cf section 1.3.3). L'intensité a finalement été déterminée pour avoir un maximum de la composante horizontale de 20 nT à la surface de la Terre. La Fig. 6.2 présente le champ obtenu pour les anneaux auroraux dans le référentiel magnétique. Pour l'anneau de courant magnétosphérique, l'intensité de la partie symétrique de cet anneau est estimée dans [Le *et al.*, 2004]. Elle est fixée à $1.2 \cdot 10^6$ A. On détermine alors h pour avoir un maximum de la composante horizontale de 20 nT à la surface de Terre. Les valeurs retenues sont présentées dans le tableau 6.1.

La modulation par le cycle solaire est obtenue en modulant l'amplitude des composantes du champ magnétique par une sinusoïde à 11 ans.

Si on suppose le manteau isolant, on peut évaluer la contribution de chaque système de courants à la surface du noyau, et en particulier à l'équateur. En effet, c'est là que l'inertie des cylindres géostrophiques est minimum. Les différentes contributions sont représentées sur la Fig. 6.3. Comme l'anneau de courant magnétosphérique est loin de la Terre, il crée à peu près le même champ à la surface de la Terre qu'à la surface du noyau. C'est donc ce système de courant qui aura la contribution la plus importante à ce mécanisme d'excitation des ondes de torsion.

On obtient les coefficients du développement en harmoniques sphériques du potentiel magnétique à partir de ceux de la composante radiale du champ créé par l'anneau de courant magnétosphérique.

Dans le référentiel magnétique, on obtient les coefficients du tableau 6.2, et dans le référentiel terrestre, les coefficients obtenus sont présentés dans le tableau 6.3. Les notations sont celles de [Jacobs, 1987, Chap. 4, Eq. (20)].

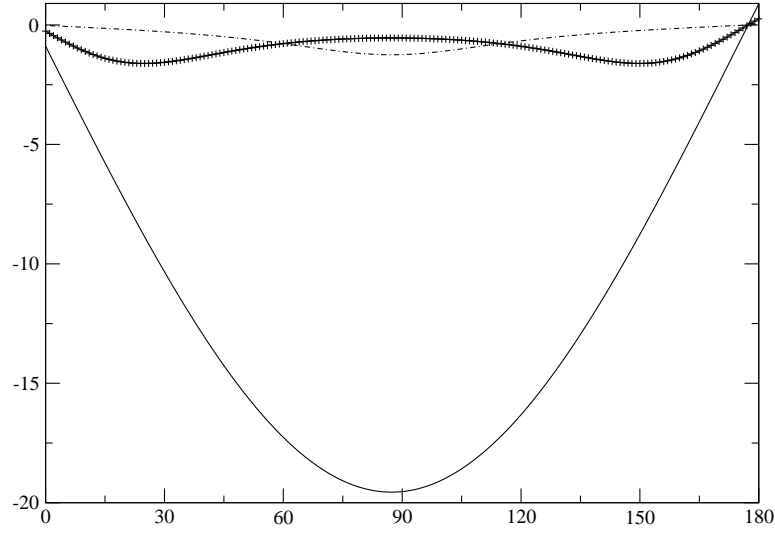


FIG. 6.3: Composante $b_{e,\theta}$ (nT) à la surface du noyau en fonction de la colatitude ($^\circ$) pour l'anneau de courant magnétosphérique (trait plein), les anneaux auroraux (+) et l'électrojet équatorial (pointillé), dans le référentiel terrestre.

$$\begin{aligned}
 q_1^0 &= 9.86 \text{ nT} \\
 q_2^0 &= 0 \\
 q_3^0 &= -0.21 \text{ nT} \\
 q_4^0 &= 0 \\
 q_5^0 &= 0.005 \text{ nT} \\
 q_6^0 &= 0
 \end{aligned}$$

TAB. 6.2: Développement en harmoniques sphériques du champ magnétique créé par l'anneau de courant magnétosphérique à la surface de la Terre dans le référentiel géomagnétique.

6.2 Réponse d'un noyau solide à une excitation externe

On considère, dans un premier temps, un noyau solide ; ce qui revient à négliger les effets hydrodynamiques du noyau. Le manteau est isolant. Les calculs ont été faits dans le chapitre 3.3.

Le champ magnétique externe exciteur, de la forme $b_e e^{i\omega t}$, peut pénétrer le noyau sur une épaisseur de peau δ , dépendant de la fréquence de l'excitation ainsi que de la conductivité du

$q_1^0 = 9.67 \text{ nT}$	$s_1^0 = 0$
$q_1^1 = 0.64 \text{ nT}$	$s_1^1 = 1.77 \text{ nT}$
$q_2^0 = 0$	$s_2^0 = 0$
$q_2^1 = 0$	$s_2^1 = 0$
$q_2^2 = 0$	$s_2^2 = 0$
$q_3^0 = -0.19 \text{ nT}$	$s_3^0 = 0$
$q_3^1 = -0.030 \text{ nT}$	$s_3^1 = -0.083 \text{ nT}$
$q_3^2 = 0.010 \text{ nT}$	$s_3^2 = -0.0089 \text{ nT}$
$q_3^3 = 0.001 \text{ nT}$	$s_3^3 = 0.0005 \text{ nT}$
$q_4^0 = 0$	$s_4^0 = 0$
$q_4^1 = 0$	$s_4^1 = 0$
$q_4^2 = 0$	$s_4^2 = 0$
$q_4^3 = 0$	$s_4^3 = 0$
$q_4^4 = 0$	$s_4^4 = 0$
$q_5^0 = 0.0034 \text{ nT}$	$s_5^0 = 0$
$q_5^1 = 0.0010 \text{ nT}$	$s_5^1 = 0.0028 \text{ nT}$
$q_5^2 = -0.0006 \text{ nT}$	$s_5^2 = 0.0005 \text{ nT}$
$q_5^3 = -0.0001 \text{ nT}$	$s_5^3 < 10^{-4} \text{ nT}$
$q_5^4 < 10^{-4} \text{ nT}$	$s_5^4 < 10^{-4} \text{ nT}$
$q_5^5 < 10^{-4} \text{ nT}$	$s_5^5 < 10^{-4} \text{ nT}$

TAB. 6.3: Coefficients du développement en harmoniques sphériques du potentiel magnétique externe de l'anneau de courant magnétosphérique dans le référentiel terrestre.

noyau (cf Eq. (3.23))

$$\delta = \sqrt{\eta \frac{T}{\pi}}$$

Si $\eta = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ et $T = 11$ ans, alors $\delta = 10$ km. Dans cette fine coquille à la surface du noyau, les courants induits sont zonaux dans le référentiel magnétique. Ce référentiel fait un angle $\theta_0 = 11^\circ$ avec l'axe de rotation de la Terre. Dans ce repère magnétique, avec une approximation de couche limite, les courants sont proportionnels à (cf Eq. (3.34))

$$\frac{b_e}{\delta} e^{-(c-r)/\delta} \vec{e}_{\phi'}$$

avec toujours la notation « prime » pour le référentiel magnétique. Ceci ne change pas dans le cas d'un manteau conducteur dont la conductivité ne dépend que du rayon.

Les courants induits par le champ externe dans le noyau interagissent avec le champ magnétique ambiant du noyau pour accélérer les CG. L'ordre de grandeur des vitesses géostrophiques est donné par

$$\rho \frac{\partial u_g}{\partial t} \sim \frac{1}{4\pi z_T} \int_{-z_T}^{z_T} \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi dz \quad (6.1)$$

La partie azimutale de la force de Lorentz est évaluée par

$$(\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi = \underbrace{(\vec{j}_e \wedge \vec{B}_0)_\phi}_{\frac{b_e B_{0,r}}{\mu_0 \delta}} + \underbrace{(\vec{j}_i \wedge \vec{b}_e)_\phi}_{\frac{b_e B_{0,r}}{\mu_0 c}} + \underbrace{(\vec{j}_i \wedge \vec{B}_0)_\phi}_{\oint () d\phi = 0} + \underbrace{(\vec{j}_e \wedge \vec{b}_e)_\phi}_{\frac{b_e^2}{\mu_0 \delta}}$$

L'intégration sur la hauteur d'un CG n'est significative que sur la hauteur $\delta_z = \delta \cos \theta$. L'intégrale de surface (6.1) est divisée par la hauteur $z_T = c \cos \theta$ (θ est la colatitute), ainsi

$$\rho \frac{\partial u_g}{\partial t} \sim (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi \frac{\delta}{c} \sim \frac{b_e B_{0,r}}{\mu_0 c}$$

à l'ordre 0 en δ/c . Le temps caractéristique T est construit sur la période des ondes de torsion à l'équateur : $T = c\sqrt{\mu_0 \rho}/B_{0,r}$. Ceci est une bonne approximation car c'est là que les ondes de torsion sont préférentiellement excitées. Elles y ont une inertie minimum. D'où

$$u_g \sim \frac{b_e}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

D'un point de vue géophysique, avec $b_e = 4 \text{ nT}$, on obtient dans un noyau solide

$$u_g \sim 10^{-8} \text{ m.s}^{-1}$$

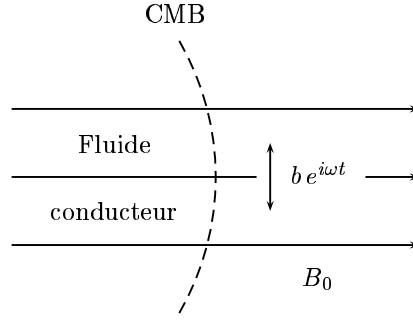
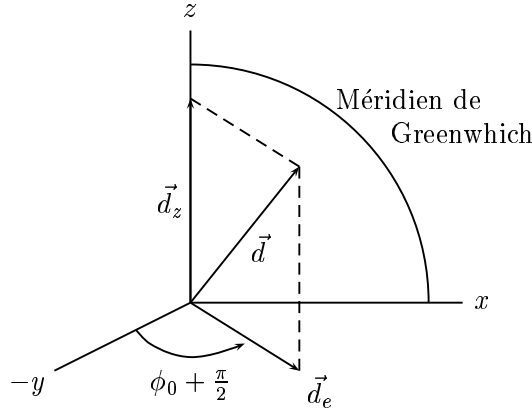


FIG. 6.4: Coupe équatoriale de la frontière noyau-manteau.

6.3 Prise en compte des effets hydrodynamiques, géométrie sphérique

On se place maintenant en géométrie sphérique : une coupe équatoriale schématisée de la frontière noyau-manteau est présentée Fig. 6.4.

On considère l'interaction entre le champ dynamo et la perturbation. Cette interaction peut être considérée suivant deux directions particulières : parallèlement et perpendiculairement au dipôle équatorial \vec{d}_e (cf Fig. 6.5). Pour la partie du champ dynamo qui est colinéaire au dipôle équatorial, c'est la partie de la perturbation excitatrice qui est orthogonale à cette direction qui compte dans le mécanisme, car les ondes d'Alfvén sont transverses ; et vice versa.

FIG. 6.5: Projection du dipôle \vec{d} en sa partie équatoriale (\vec{d}_e) et axiale (\vec{d}_z).

On se restreint, pour l'instant, à l'interaction entre la perturbation extérieure équatoriale (donc en $m = 1$) et la partie du champ dynamo d'ordre $m = 1$. Cette partie est de la forme

$$a(t) \cos \phi + b(t) \sin \phi \quad (6.2)$$

avec

$$\begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{l^*} (l+1) \left(\frac{c}{a}\right)^{l+2} \begin{bmatrix} g_l^1(t) \\ h_l^1(t) \end{bmatrix} P_l^1(0)$$

Les termes de degré pair ne contribuent pas car $P_{2n}^1(0) = 0$ à l'équateur.

Les modèles de champ *gufm1* [Jackson *et al.*, 2000] et *CM4* [Sabaka *et al.*, 2004] ont été utilisés pour avoir les coefficients d'ordre $m = 1$ au cours du temps.

On peut avoir une idée de l'efficacité de ce mécanisme d'excitation au cours du XX^{ème} siècle en regardant l'évolution temporelle de (6.2) parallèlement ($B_{0,//}$) et perpendiculairement ($B_{0,\perp}$) à \vec{d}_e . Comme la direction de l'axe du dipôle n'a quasiment pas changé au cours du XX^{ème} siècle (cf Fig. B.1), on peut considérer la direction \vec{d}_e constante.

$$\vec{d}_e = \begin{bmatrix} d_{e,x} \\ d_{e,y} \end{bmatrix}$$

avec $d_{e,x} = 0.34$ et $d_{e,y} = -0.94$, ce qui correspond à un dipôle de longitude $\phi_0 = -70^\circ$.

Evolution temporelle de $B_{0,//}$

La partie du champ dynamo parallèle au dipôle équatorial interagit avec la partie de la perturbation extérieure qui lui est orthogonale

$$B_{0,//}(t) = \vec{d}_e \cdot \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix} = d_{e,x} a(t) + d_{e,y} b(t)$$

La courbe obtenue est présentée Fig. 6.6.

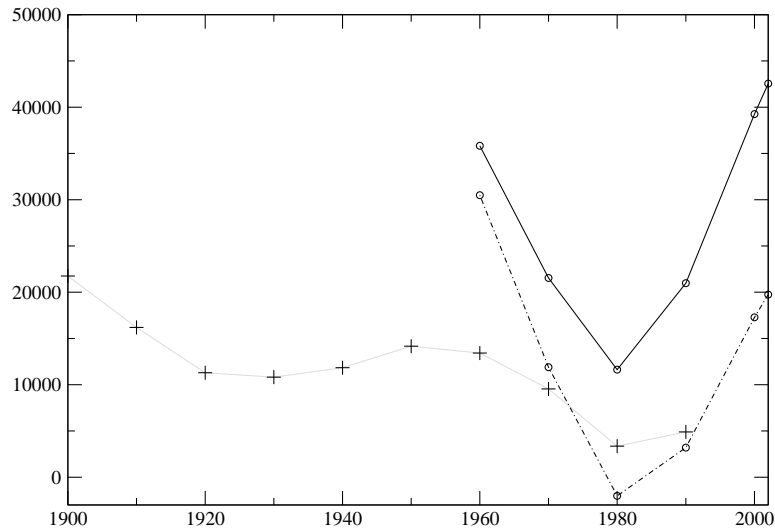


FIG. 6.6: Evolution au cours du XX^{ème} siècle de la partie du champ dynamo ($m = 1$) parallèle au dipôle équatorial ($B_{0,//}$, en nT), calculée avec *gufm1* ($l^* = 13$, +) et *CM4* ($l^* = 13$, trait plein) ou ($l^* = 11$, pointillé). l^* est le degré de troncature du développement.

Evolution temporelle de $B_{0,\perp}$

La partie du champ dynamo orthogonale au dipôle équatorial interagit avec la partie de la perturbation extérieure qui est parallèle au dipôle équatorial

$$B_{0,\perp}(t) = \begin{bmatrix} -d_{e,y} \\ d_{e,x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix} = d_{e,x} b(t) - d_{e,y} a(t)$$

La courbe obtenue est présentée Fig. 6.7.

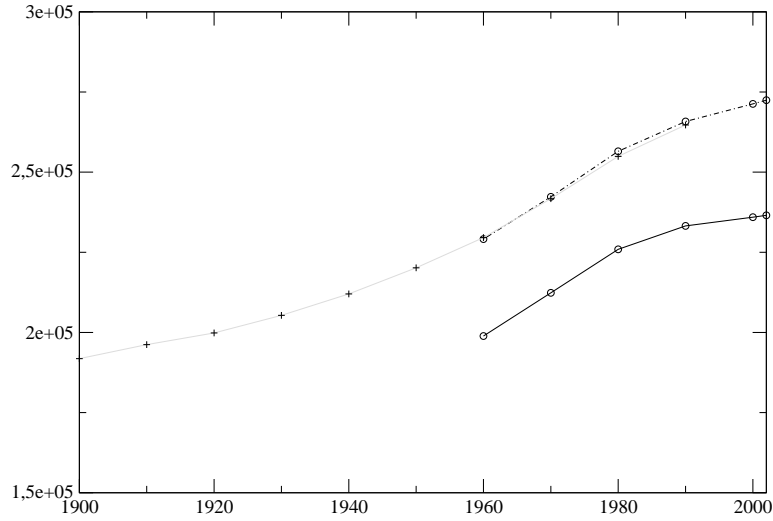


FIG. 6.7: Evolution au cours du XX^{ème} siècle de la partie du champ dynamo ($m = 1$) orthogonale au dipôle équatorial ($B_{0,\perp}$, en nT), calculée avec *gufm1* ($l^* = 13, +$) et *CM4* ($l^* = 13$, trait plein) ou ($l^* = 11$, pointillé). l^* est le degré de troncature du développement.

La partie du champ dynamo orthogonale au dipôle équatorial ($B_{0,\perp}$) est dix fois plus grande que la partie parallèle ($B_{0,\parallel}$). C'est elle qui va avoir la contribution la plus importante au mécanisme d'excitation des ondes de torsion. C'est donc la partie de la perturbation extérieure qui a la polarisation dans le plan tangent à la frontière noyau-manteau qui va préférentiellement être transmise au noyau.

6.4 Le code IMPULse

Le code OTg (cf section 5.2.5) a été adapté à une étude fréquentielle pour devenir le code IMPULse qui détermine la réponse impulsionnelle du noyau à une perturbation externe.

On résoud toujours les deux équations aux dérivées partielles couplées (5.12) et (5.13) rappelées ici

$$R_0 \frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{1}{4\pi z_T} \int_{-z_T}^{z_T} \oint (\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi d\phi dz \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \mathbf{rot} \left(u_g \vec{e}_\phi \wedge \vec{B} \right) + R_0 \Delta \vec{b} \quad (6.4)$$

Cette perturbation externe est un champ magnétique créé par l'anneau de courant magnétosphérique (cf section 6.1.2). Ce champ est dominé par le terme dipolaire q_1^0 dans le référentiel géomagnétique (cf Tab. 6.2). Dans le référentiel terrestre, le champ est représenté par les termes q_1^0 , q_1^1 et s_1^1 . On regarde l'interaction de la partie équatoriale ($l = 1$, $m = 1$) de ce dipôle avec les termes d'ordre $m = 1$ du champ dynamo qui n'est plus axisymétrique. Plus généralement, le code est prévu pour une excitation externe d'ordre m impair quelconque. Dans le noyau, la perturbation \vec{b} est décomposée en ses parties toroïdale t et poloïdale p sous la forme

$$t = t(r) P_l^m(\cos \theta) \operatorname{Re}[({}_t a_l^m + i {}_t b_l^m) e^{im\phi}]$$

$$p = p(r) P_l^m(\cos \theta) \operatorname{Re}[({}_p a_l^m + i {}_p b_l^m) e^{im\phi}]$$

où les coefficients ${}_x a_l^m$ et ${}_x b_l^m$ sont réels ; Re désigne la partie réelle d'un nombre complexe.

En ce qui concerne les conditions aux limites, le champ magnétique se raccorde toujours sur un manteau isolant. La condition aux limites sur la partie toroïdale est toujours

$$t|_{r=c} = 0$$

Par contre, la condition aux limites sur la partie poloïdale change à cause de la perturbation externe. La nouvelle condition aux limites est écrite sur le potentiel magnétique ψ_t , lequel est décomposé en sa partie interne et sa partie excitatrice externe dans le manteau isolant

$$\psi_t = \psi_i + \psi_e$$

ψ_e est connu à la frontière noyau-manteau, ψ_t et sa dérivée radiale sont continuent à la traversée de la frontière noyau-manteau. La partie interne vérifie la même relation que le poloïdal (3.17), puisque ils sont reliés par (3.15). On en déduit à partir du développement en harmoniques sphériques du potentiel que

$$\left. \frac{\partial \psi_t}{\partial r} \right|_{r=c} = -(l+1)\psi_i + l\psi_e$$

$$= -(l+1)\psi_t + (2l+1)\psi_e$$

dans le cas où $l = 1$. Pour les autres degrés l , $\psi_e = 0$. Le calcul du terme diffusif fait apparaître le calcul du laplacien du potentiel. Dans une approximation de couche limite, seules les dérivées radiales ont été conservées, il reste à calculer

$$\left. \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial r^2} \right|_{r=c} + \frac{2}{r} \left. \frac{\partial \psi_t}{\partial r} \right|_{r=c}$$

Le dernier terme est connu. Quant au premier, il est calculé par différence finie

$$\left. \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial r^2} \right|_{r=c} = \frac{1}{\delta_r} \left(\left. \frac{\partial \psi_t}{\partial r} \right|_{r=c-\delta_r} - \left. \frac{\partial \psi_t}{\partial r} \right|_{r=c} \right)$$

La grille radiale n'est pas uniforme pour permettre de résoudre correctement les couches limites. La condition à l'équateur pour la vitesse géostrophique est donnée par (4.35).

L'interaction joue sur les ordres m impairs. Le reste du champ dynamo, d'ordre pair, est représenté par un champ magnétique fictif en $m = 0$, qui a le même $\{B_s^2\}(s)$ que la partie en m pair du champ dynamo (cf section 5.3).

La vitesse géostrophique est toujours décomposée en sa partie symétrique et anti-symétrique par rapport au plan équatorial.

La réponse impulsionnelle est obtenue par une fonction Dirac $\delta(t)$ représentée comme une gaussienne

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-t^2/\epsilon}}{\sqrt{\pi\epsilon}}$$

Le programme commence au temps t_0 négatif : comme la gaussienne a son maximum au temps $t = 0$, il faut commencer avant pour décrire correctement l'impulsion. Les résultats convergent dès que $t_0 \sim -3\epsilon$. Le programme fournit la fonction de Green (réponse impulsionnelle) $G(t')$ pour la vitesse géostrophique, le champ magnétique induit par l'onde ... D'une manière générique, la fonction $y(t)$ est obtenu en convoluant la fonction de Green correspondante $G_y(t')$ avec la perturbation externe b_e

$$y(t) = \int_{t'_0}^{T'} G_y(t') b_e(t - t') dt'$$

où T est la durée de calcul.

6.5 Résultats

6.5.1 Excitation à l'équateur

Comme dans le cas d'un noyau solide (cf section 6.2), la perturbation magnétique pénètre dans le noyau à l'équateur. C'est là que l'inertie des cylindres géostrophiques est minimum. La Fig. 6.9 représente le début de la réponse impulsionnelle du noyau, à partir du moment où la gaussienne passe par son maximum en $t = 0$. Une carte de propagation est présentée Fig. 6.8.

Dans le cas d'une perturbation en $l = 2$ et $m = 1$, qui est nulle à l'équateur, quasiment aucune propagation d'onde n'est observée (cf Tab. 6.5).

6.5.2 Propagation vers le coeur du noyau

La Fig. 6.10 décrit les diverses phases de la pénétration de la perturbation magnétique extérieure dans le noyau. En (a) et (b), la pénétration est transportée par les ondes d'Alfvén dans le noyau. On pourra noter l'invariance en z des ondes. Un peu plus loin à l'intérieur du noyau, en (c) et (d), le cisaillement du champ dynamo par ces ondes commence à se voir. Il

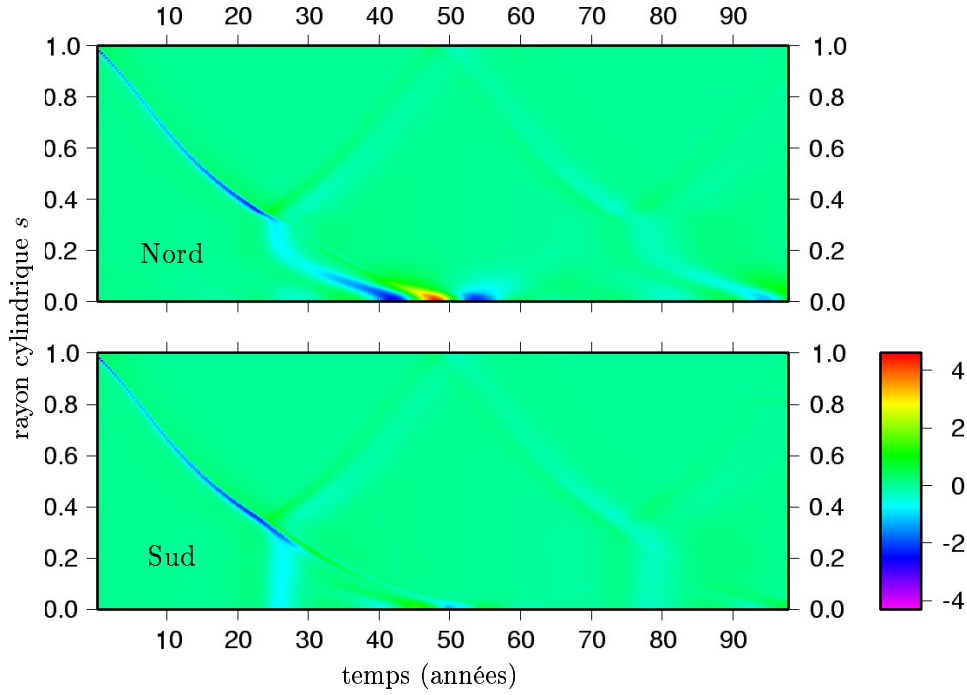


FIG. 6.8: Réponse impulsionnelle d'un noyau avec graine au mécanisme d'excitation au cours du temps (en années). L'échelle de couleur donne la valeur de l'amplitude de l'onde ω_g à un facteur 10^{-12} près. La partie extérieure au cylindre tangent est la même dans les deux parties de l'image. Cette partie est complétée par la partie interne au cylindre tangent dans l'hémisphère précisé par *Nord* ou *Sud*.

y a alors perte de l'invariance en z . Les structures obtenues reflètent la géométrie du champ dynamo.

Lorsque l'onde arrive sur le cylindre tangent, une partie est transmise à l'intérieur, tandis que le reste est réfléchi vers l'équateur, et ainsi de suite. On peut observer ainsi plusieurs aller-retour de l'onde, pour un nombre de Rossby de $R_0 = 5.95 \cdot 10^{-10}$ représentatif du cas terrestre.

6.5.3 A l'intérieur du cylindre tangent

Contrairement au cas avec profil initial (code OTg), pour le même nombre de Rossby $R_0 = 10^{-9}$, l'onde de torsion pénètre les deux hémisphères. Dans l'hémisphère Nord, où $\{B_s^2\}$ est plus faible (cf Fig. 5.2), la tension magnétique entre cylindres est moindre et l'onde y pénètre avec une longueur d'onde plus grande que dans l'hémisphère Sud.

6.5.4 Amplitude des vitesses géostrophiques

Une fois obtenue la réponse impulsionnelle obtenue (un exemple en est donné Fig. 6.12), il ne reste plus qu'à la convoluer par une sinusoïde à 11 ans pour obtenir l'amplitude du signal. Les

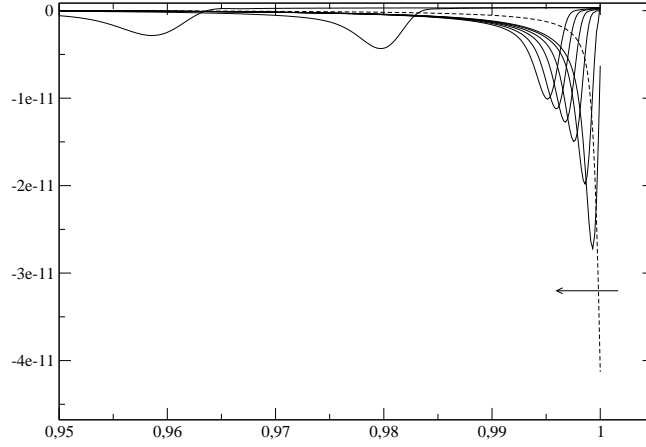


FIG. 6.9: Réponse impulsionnelle du noyau à différents temps proches de zéro, en fonction du rayon cylindrique s . La flèche indique le sens de propagation.

α_0	α	$s = 0.5$	$s = 0.75$	$s = 0.95$
1	1	$2 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$
2	1	$5.4 \cdot 10^{-9}$	$4.6 \cdot 10^{-9}$	$7.4 \cdot 10^{-9}$
0.5	1	$8.4 \cdot 10^{-9}$	$9.2 \cdot 10^{-9}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$
0.5	2	$8.4 \cdot 10^{-9}$	$9.2 \cdot 10^{-9}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$

TAB. 6.4: Amplitudes de $c\omega_g$ (en m.s^{-1}) pour trois valeurs du rayon s de la perturbation ($l = 1, m = 1$). Les coefficients α_0 et α interviennent dans le champ dynamo (6.5).

vitesses obtenues par ce mécanisme sont présentées dans le tableau 6.4 pour une perturbation en $l = 1, m = 1$ et dans le tableau 6.5 pour une perturbation en $l = 2, m = 1$. Dans les résultats présentés dans le tableau 6.4, plusieurs modèles de champ magnétique dans le noyau ont été testés. Le champ dynamo est construit à partir du modèle décrit

$$B_0 = \alpha_0 \sum_{l=1}^{l^*} B_l^0 + \alpha B_l^1 \quad (6.5)$$

La condition à l'équateur (4.35) est compatible avec une mise à l'échelle de ω_g par b_e et une mise à l'échelle de la longueur d'onde des ondes de torsion par le champ dynamo, exactement comme dans le cas cartésien.

α_0	α	$s = 0.5$	$s = 0.75$	$s = 0.95$
1	1	$7.4 \cdot 10^{-10}$	$7.2 \cdot 10^{-10}$	$7.6 \cdot 10^{-10}$

TAB. 6.5: Amplitudes de $c\omega_g$ (en m.s^{-1}) pour trois valeurs du rayon s de la perturbation ($l = 2, m = 1$). Les coefficients α_0 et α interviennent dans le champ dynamo (6.5).

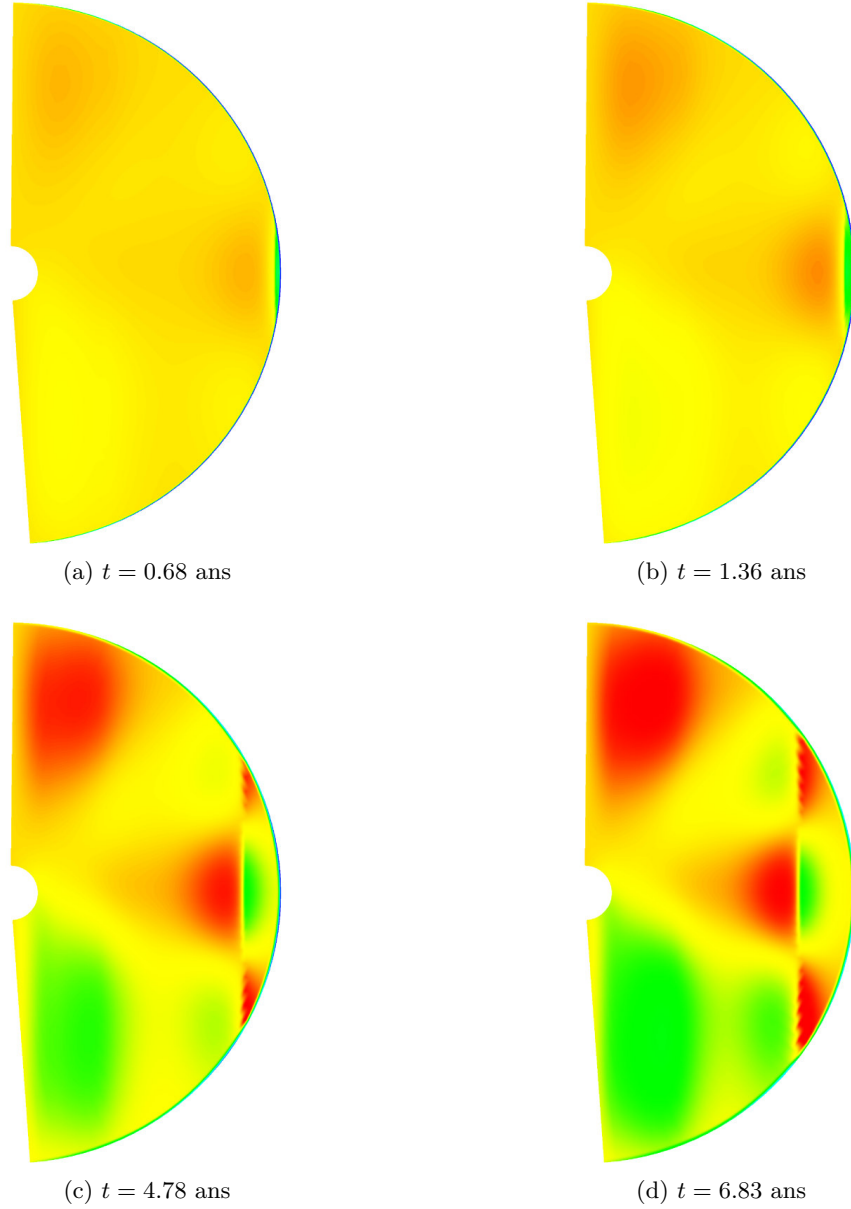


FIG. 6.10: Pénétration de la perturbation magnétique radiale (réponse impulsionnelle), dans le plan méridien perpendiculaire au dipôle équatorial \vec{d}_e ($\phi = 20^\circ$), à différents instants, pour un noyau de conductivité $7.5 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$. Echelle des couleurs : rouge pour les valeurs positives, vert pour les valeurs négatives et jaune proche de zéro. Les valeurs en rouge et en vert sont du même ordre de grandeur. Les valeurs n'ont pas de sens immédiat car il faut convoluer cette réponse impulsionnelle par un signal à la bonne période pour avoir l'amplitude de la perturbation magnétique.

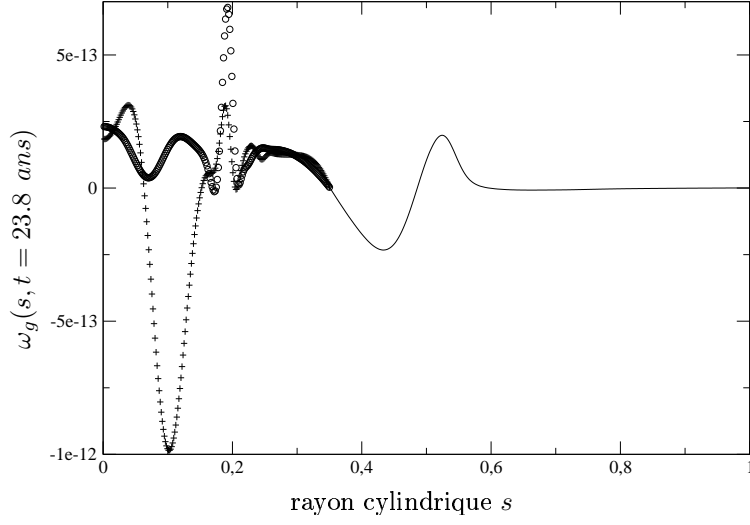


FIG. 6.11: Réponse impulsionnelle du noyau à $t = 23.8$ ans, en fonction du rayon cylindrique s . Hémisphère Nord (+) et Sud (o).

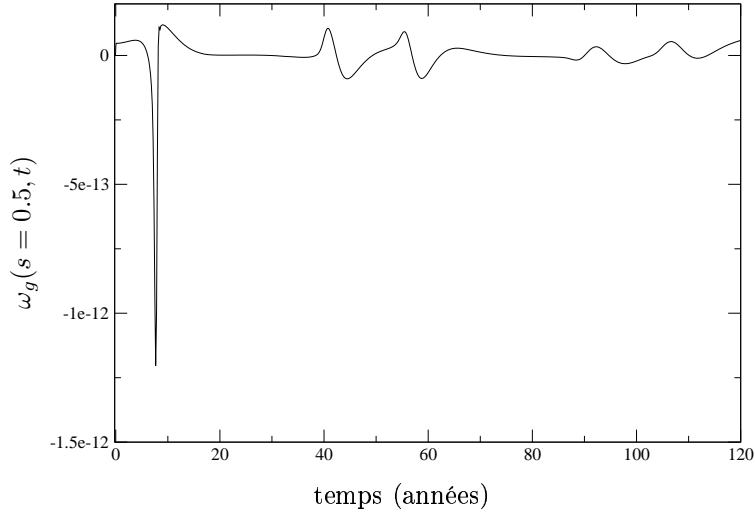


FIG. 6.12: Réponse impulsionnelle pour ω_g en $s = 0.5$ en fonction du temps (en années).

6.5.5 Manteau conducteur

Dans le cas où l'effet des ondes de torsion serait important (comme on peut supposer qu'il le soit, même si ce n'est pas associé à ce mécanisme), la présence ou non d'un manteau conducteur modifie la réponse magnétique, associée aux ondes de torsion, qui est enregistrée dans les observatoires à la surface de la Terre.

Bien que le mécanisme actuel ait un effet trop petit d'un point de vue géophysique, on peut appliquer les résultats de la section 3.3 et en particulier l'équation (3.37) à ce mécanisme. L'équation (3.37), rappelée ci-dessous

$$i_l^m(\omega) = \left(\frac{d_{21} - \beta_l d_{22}}{d_{11} - \beta_l d_{12}} \right) \varepsilon_l^m(\omega) + \left[d_{22} - d_{12} \left(\frac{d_{21} - \beta_l d_{22}}{d_{11} - \beta_l d_{12}} \right) \right] \alpha_l c_l^m(\omega) \quad (6.6)$$

fait intervenir trois jeux de coefficients : les coefficients ε_l^m du développement en harmoniques sphériques du champ inducteur externe, les coefficients c_l^m du champ magnétique associé aux processus du noyau (diffusion, ondes, ...) et les coefficients i_l^m du champ magnétique induit dans les observatoires à la surface de la Terre par les deux champs magnétiques précédents à travers un manteau conducteur, lequel est pris en compte dans la matrice D de coefficients d_{11} , d_{12} , d_{21} et d_{22} .

Je présente maintenant une application numérique de cette relation. Le code IMPULse raccorde le champ magnétique à un manteau isolant. Le modèle de conductivité adopté pour le manteau est le suivant

$$\sigma_m = \begin{cases} 3 \text{ S.m}^{-1} & \text{pour } 3500 \text{ km} < r < 5500 \text{ km} \\ 0 \text{ S.m}^{-1} & \text{pour } 5500 \text{ km} < r < 6400 \text{ km} \end{cases}$$

ce qui correspond à une conductance de $6 \cdot 10^6 \text{ S}$. D'après la section 5.6, une telle conductance ne dissipe presque pas les ondes de torsion. La condition de raccordement du code IMPULse sur un manteau isolant reste correcte.

Les coefficients ε_l^m , c_l^m et i_l^m sont associés à un développement en harmoniques sphériques du type (3.27) en $e^{im\phi}$. On peut établir une équivalence entre ce précédent développement et un développement du type (1.2) en $\cos(m\phi)$ et $\sin(m\phi)$. Dans ce cas, on obtient les équivalences suivantes entre les coefficients

$$\begin{aligned} \varepsilon_l^m &\longleftrightarrow \{q_l^m, s_l^m\} \\ c_l^m &\longleftrightarrow \{g_{l,c}^m, h_{l,c}^m\} \\ i_l^m &\longleftrightarrow \{g_l^m, h_l^m\} \end{aligned}$$

via les relations de passage (3.28) et (3.29).

Le tableau 6.6 présente la réponse (g_l^m, h_l^m) à la surface de la Terre dans les observatoires pour un champ inducteur (q_l^m, s_l^m) et une réponse du noyau $(g_{l,c}^m, h_{l,c}^m)$ déterminée par le code IMPULse. Les coefficients (q_1^1, s_1^1) représentent une perturbation externe d'amplitude 4 nT.

6.6 Conclusions

Ce mécanisme d'excitation établit un lien entre les systèmes de courant externes et le noyau, malgré l'isolement du noyau. D'un point de vue géophysique, les vitesses géophysiques associées à ce mécanisme, de l'ordre de 10^{-8} m.s^{-1} , sont trois à quatre ordres de grandeur inférieures à l'amplitude de la dérive vers l'ouest. Ce mécanisme est d'autant plus efficace que la période excitatrice est grande.

A de telles périodes, le champ du noyau participe pleinement au champ magnétique mesuré à la surface de la Terre. L'influence d'un manteau conducteur a été prise en compte, malgré la faible amplitude des vitesses géostrophiques obtenues par le mécanisme d'excitation.

l	m	q_l^m (nT)	s_l^m (nT)	$g_{l,c}^m$ (nT)	$h_{l,c}^m$ (nT)	g_l^m (nT)	h_l^m (nT)
1	0	—	—	—	—	—	—
1	1	1.370	-3.760	$6.358 \cdot 10^{-3}$	$-1.649 \cdot 10^{-2}$	$1.146 \cdot 10^{-1}$	$-3.146 \cdot 10^{-1}$
2	0	—	—	—	—	—	—
2	1	—	—	$3.428 \cdot 10^{-5}$	$-1.818 \cdot 10^{-5}$	$-1.092 \cdot 10^{-6}$	$5.788 \cdot 10^{-7}$
2	2	—	—	—	—	—	—
3	0	—	—	—	—	—	—
3	1	—	—	$2.201 \cdot 10^{-4}$	$-4.043 \cdot 10^{-4}$	$-3.424 \cdot 10^{-6}$	$6.288 \cdot 10^{-6}$
3	2	—	—	—	—	—	—
3	3	—	—	—	—	—	—
4	0	—	—	—	—	—	—
4	1	—	—	$1.191 \cdot 10^{-5}$	$-2.209 \cdot 10^{-5}$	$-9.242 \cdot 10^{-8}$	$1.714 \cdot 10^{-7}$
4	2	—	—	—	—	—	—
4	3	—	—	—	—	—	—
4	4	—	—	—	—	—	—
5	0	—	—	—	—	—	—
5	1	—	—	$1.457 \cdot 10^{-4}$	$-1.331 \cdot 10^{-4}$	$-5.725 \cdot 10^{-7}$	$5.231 \cdot 10^{-7}$
5	2	—	—	—	—	—	—
5	3	—	—	—	—	—	—
5	4	—	—	—	—	—	—
5	5	—	—	—	—	—	—

TAB. 6.6: Réponse magnétique (g_l^m, h_l^m) à la surface de la Terre dans les observatoires pour un champ inducteur (q_l^m, s_l^m) et une réponse du noyau ($g_{l,c}^m, h_{l,c}^m$) déterminée par le code IMPULse. Les coefficients (q_1^1, s_1^1) représentent une perturbation externe d'amplitude 4 nT. Les coefficients sont en nT.

Conclusions et perspectives ...

Ce travail de thèse a porté, en premier lieu, sur l'étude de la propagation des ondes de torsion dans le noyau de la Terre. Le modèle de champ magnétique choisi pour le noyau est tel que le champ magnétique a la même amplitude partout dans le noyau, alors que les modèles dynamo sont en général dix fois plus forts à la graine qu'à l'équateur. Le couplage entre la graine et le fluide étant sous-estimé, les ondes de torsion peuvent pénétrer à l'intérieur du cylindre tangent pour des valeurs modérées de la conductivité du noyau (la conductivité de la graine est identique à celle du noyau). Il serait intéressant de changer de modèle de champ dynamo : en augmentant le champ radial à la graine, le couplage entre la graine et le noyau serait amélioré. On peut s'attendre à ce que les ondes de torsion soient alors réfléchies sur le cylindre tangent, produisant alors une résonance des ondes de torsion bien marquée. Une étude de la non-linéarité en champ magnétique (on peut montrer que cette non-linéarité domine très fortement la non-linéarité en vitesse géostrophique) pourrait être faite.

La mise en évidence expérimentale des ondes de torsion n'a pas encore été réalisée. Il sera peut-être possible de les voir dans l'expérience DTS menée au sein de l'équipe géodynamo du LGIT à Grenoble. Il s'agit d'une sphère remplie de sodium liquide avec une graine qui a une aimantation permanente. Les ondes de torsion devraient avoir une période de l'ordre du dixième de seconde. Cependant, le temps de diffusion magnétique est du même ordre de grandeur. Une modélisation de cette expérience serait possible en adaptant les conditions aux limites pour que le champ magnétique ne se raccorde plus sur un manteau isolant, mais sur une paroi conductrice.

Un mécanisme d'excitation des ondes d'Alfvén dans le noyau a été présenté : l'anneau de courant magnétosphérique crée un champ magnétique externe – modulé à 11 ans par l'activité solaire – qui traverse le manteau et parvient à exciter des ondes d'Alfvén dans le noyau. Cependant, les vitesses géostrophiques obtenues sont trop petites pour être significatives d'un point de vue géophysique. On pourrait comparer le mécanisme d'excitation électromagnétique étudié à des forçages mécaniques, variations du taux de rotation du manteau solide en réponse aux moments océaniques et aux marées zonales de très longues périodes.

Il n'était pas évident a priori que les vitesses géostrophiques obtenues par ce mécanisme se mettent à l'échelle comme la perturbation externe, donnant exactement le même résultat que le cas cartésien.

Le travail effectué sur les données magnétiques a permis de retrouver qualitativement des données de Harwood et Malin [1977]. Il serait intéressant de refaire leur inversion avec les valeurs trouvées pour voir comment est modifiée la réponse électromagnétique Q du manteau.

Le cycle à 70 ans prédit par Rivin [1985] semble être détecté sur la longue série magnétique de déclinaison. L'étude des spectres du nombre de Wolf semble mettre en évidence le cycle à 88 ans modulé par le cycle à 2200 ans trouvés dans les traceurs de l'activité solaire [Peristykh et Damon, 2003].

Finalement, un projet ambitieux serait de reprendre l'inversion de Zatman et Bloxham [1997] : le champ de vitesse obtenu à la surface du noyau à partir des données magnétiques et d'un manteau conducteur pourrait être inversé pour obtenir la distribution de $\{B_s^2\}$ dans tout le noyau (et pas seulement en dehors du cylindre tangent) ainsi que la conductivité à la base du manteau. L'inversion pourrait être contrainte : la distribution de $\{B_s^2\}$ doit être positive partout dans le noyau et n'évoluer que très lentement au cours du temps.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Notations

\vec{B}	champ magnétique
\vec{A}	potentiel vecteur magnétique
Ψ	potentiel magnétique
P	scalaire poloïdal
T	scalaire toroïdal
a ou R_t	rayon terrestre
c	rayon du noyau
b ou r_g	rayon de la graine
$j_l(r)$	fonction de Bessel sphérique de première espèce
$n_l(r)$	fonction de Bessel sphérique de deuxième espèce
i	nombre imaginaire pur de module unité, $i^2 = -1$
CG	cylindre géostrophique
ν_*	viscosité cinématique
$\nu = \nu_*/\rho$	viscosité dynamique
σ	conductivité électrique
$\eta = 1/(\mu_0\sigma)$	diffusivité magnétique

$$\Psi(X) = \frac{1}{\pi} \oint \left[X(+z_T) + X(-z_T) \right] d\phi$$

$$\{B_s^2\}(s) = \frac{1}{4\pi z_T} \int_{-z_T}^{z_T} \oint B_s^2 d\phi dz$$

Fonctions associées de Legendre modifiées pour le calcul de $\{B_s^2\}$

$$m = 0 \quad \tilde{P}_l^0 = \sqrt{2}P_l^0$$

$$m > 0 \quad \tilde{P}_l^m = P_l^m \tag{A.1}$$

Annexe B

Passage du référentiel magnétique au référentiel des cylindres géostrophiques

Dans cette annexe, on suppose connue l'expression d'un champ magnétique créé par un système de courants dans un référentiel dit magnétique, tel que l'axe z' est aligné avec l'axe du dipôle (cf Fig. B.1). On cherche à connaître l'expression de ce champ magnétique dans le référentiel dit des cylindres géostrophiques, tel que l'axe z est aligné avec l'axe de rotation $\vec{\Omega}$ de la Terre.

Si le champ magnétique de départ est connu par son développement en harmoniques sphériques, il peut être intéressant d'utiliser la méthode numérique proposée par Goldstein [1984].

Dans le référentiel magnétique (x', y', z') , un point M a pour coordonnées sphériques (r, θ', ϕ') tandis que ce même point M , dans le référentiel des cylindres géostrophiques (x, y, z) a pour coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Soit,

$$\overrightarrow{OM} = \sin \theta' \cos \phi' \vec{e}_x' + \sin \theta' \sin \phi' \vec{e}_y' + \cos \theta' \vec{e}_z' \quad \text{dans } (r, \theta', \phi') \quad (\text{B.1})$$

$$= \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \quad \text{dans } (r, \theta, \phi) \quad (\text{B.2})$$

B.1 Rotation de θ_0

Par rotation de θ_0 autour de l'axe x' (cf Fig. B.2), on déplace l'axe du dipôle dans le plan méridien $\phi = 90^\circ$ W (si θ_0 est positif). Les vecteurs de base se transforment en

$$\vec{e}_x' = \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_y' = \cos \theta_0 \vec{e}_y - \sin \theta_0 \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_z' = \sin \theta_0 \vec{e}_y + \cos \theta_0 \vec{e}_z$$

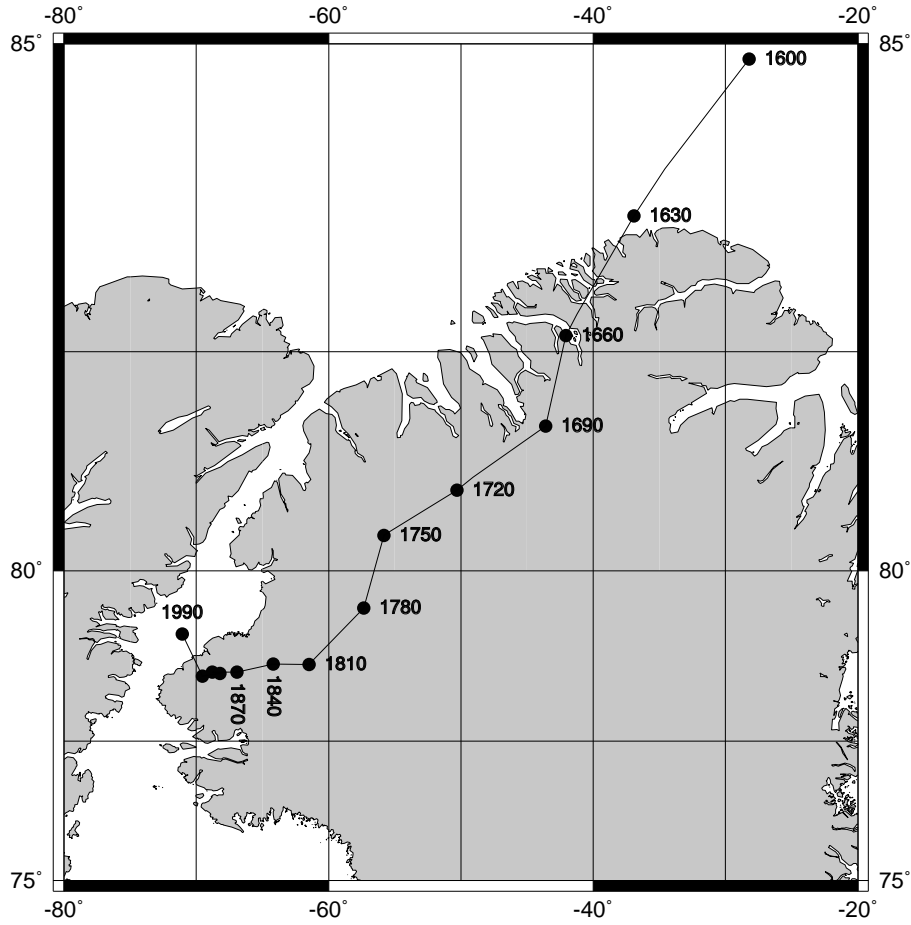


FIG. B.1: Mouvement de l'axe du dipôle tous les 30 ans depuis 1600, calculé à partir du modèle *gufm1*, dans la région du Groënland (abscisse longitude Est, ordonnée latitude).

On reporte ces 3 relations dans l'équation (B.1) et on compare avec (B.2). Sur l'axe x' , on obtient

$$\sin \theta' \cos \phi' = \sin \theta \cos \phi \quad (\text{B.3})$$

A partir des relations obtenues sur les axes y' et z' , on obtient par différentes combinaisons linéaires

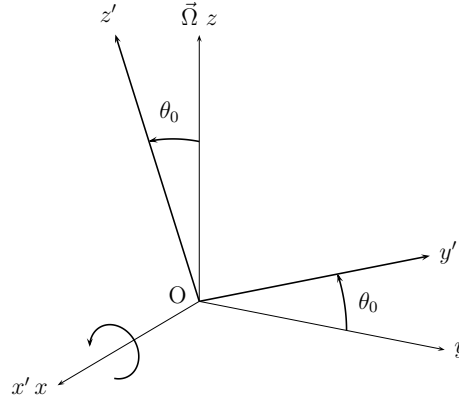
$$\sin \theta' \sin \phi' = \cos \theta_0 \sin \phi \sin \theta - \sin \theta_0 \cos \theta \quad (\text{B.4})$$

$$\cos \theta' = \sin \theta_0 \sin \theta \sin \phi + \cos \theta_0 \cos \theta \quad (\text{B.5})$$

$$(\sin \theta')^2 = (\sin \theta \cos \phi)^2 + (\cos \theta_0 \sin \theta \sin \phi - \sin \theta_0 \cos \theta)^2 \quad (\text{B.6})$$

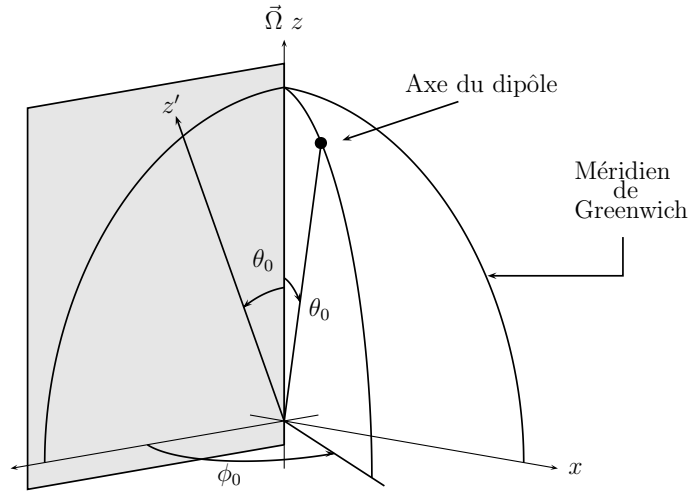
On en déduit

$$\tan \theta' = \frac{\sqrt{(\sin \theta \cos \phi)^2 + (\sin \theta \sin \phi \cos \theta_0 - \cos \theta \sin \theta_0)^2}}{\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \sin \phi} \quad (\text{B.7})$$

FIG. B.2: Le méridien de Greenwich est dans le plan $(x'Oz')$.

$$\tan \phi' = \frac{\cos \theta_0 \sin \phi \sin \theta - \sin \theta_0 \cos \theta}{\sin \theta \cos \phi} \quad (\text{B.8})$$

Dans un développement en harmoniques sphériques du champ magnétique terrestre, on prend comme origine des longitudes le méridien de Greenwich. Lorsque l'on étudie l'interaction entre un champ magnétique d'origine externe et un champ magnétique d'origine interne développé sur les harmoniques sphériques, il faut définir exactement la longitude du méridien contenant l'axe du champ externe. On corrige donc la position de l'axe du dipôle d'une longitude ϕ_0 , qui est de l'ordre de 20° E, pour avoir un dipôle dont la longitude est de l'ordre de 70° W (cf Fig. B.1).

FIG. B.3: Déphasage de ϕ_0 en longitude. (Pour les notations, cf Fig. B.2).

$$\tan(\phi' - \phi_0) = \frac{\cos \theta_0 \sin \phi \sin \theta - \sin \theta_0 \cos \theta}{\sin \theta \cos \phi} \quad (\text{B.9})$$

B.2 Expression de $(\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi$

Dans le repère (θ', ϕ') , les courants s'écrivent

$$\vec{j} = j_0(r, \theta', \phi') \vec{e}'_\phi$$

Après rotation de θ_0 autour de l'axe x , on exprime les courants dans le repère (θ, ϕ) :

$$\vec{j} = j_\theta \vec{e}_\theta + j_\phi \vec{e}_\phi$$

avec

$$j_\theta(r, \theta, \phi, \theta', \phi') = j_0 [\cos \phi' \cos \theta_0 \cos \theta \sin \phi - \sin \phi' \cos \theta \cos \phi + \cos \phi' \sin \theta_0 \sin \theta]$$

$$j_\phi(r, \theta, \phi, \theta', \phi') = j_0 [\sin \phi' \sin \phi + \cos \phi' \cos \theta_0 \cos \phi]$$

Connaissant la position (r, θ, ϕ) d'un point M dans le référentiel des cylindres géostrophiques, on déduit, par les relations (B.7) et (B.9), les coordonnées correspondantes qui permettent de connaître les courants j_0 dont l'expression est connue dans le référentiel magnétique. D'où l'expression suivante de $(\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi = -j_\theta B_r$.

$$(\vec{j} \wedge \vec{B})_\phi = -j_0(r, \theta', \phi') B_r \\ * [\cos \phi' \cos \theta_0 \cos \theta \sin \phi - \sin \phi' \cos \theta \cos \phi + \cos \phi' \sin \theta_0 \sin \theta]$$

B.3 Expression d'un champ de vecteur dans le nouveau repère

On ne considère ici que le cas d'un champ magnétique axisymétrique. Dans le repère magnétique (r, θ', ϕ') , il s'écrit

$$\vec{B} = B_r(r, \theta', \phi') \vec{e}'_r + B_\theta(r, \theta', \phi') \vec{e}'_\theta$$

et dans le repère des cylindres géostrophiques (r, θ, ϕ)

$$\alpha = \sin \theta' B_r(r, \theta', \phi') + \cos \theta' B_\theta(r, \theta', \phi') \\ \beta = \cos \theta' B_r(r, \theta', \phi') - \sin \theta' B_\theta(r, \theta', \phi') \\ \vec{B} = [\sin \theta \cos \phi \cos \phi' \alpha + \sin \theta \sin \phi (\sin \phi' \cos \theta_0 \alpha + \sin \theta_0 \beta) \\ + \cos \theta (\cos \theta_0 \beta - \sin \phi' \sin \theta_0 \alpha)] \vec{e}_r \\ + [\cos \theta \cos \phi \cos \phi' \alpha + \cos \theta \sin \phi (\sin \phi' \cos \theta_0 \alpha + \sin \theta_0 \beta) \\ - \sin \theta (\cos \theta_0 \beta - \sin \phi' \sin \theta_0 \alpha)] \vec{e}_\theta \\ + [-\sin \phi \cos \phi' \alpha + \cos \phi (\sin \phi' \cos \theta_0 \alpha + \sin \theta_0 \beta)] \vec{e}_\phi$$

Annexe C

Fonctions de Bessel sphériques

C.1 Définition

On appelle fonctions de Bessel sphériques les solutions de l'équation différentielle du second ordre en r

$$j_l'' + \frac{2}{r}j_l' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)j_l = 0 \quad (\text{C.1})$$

Il y a deux classes de fonctions qui satisfont cette équation différentielle : les fonctions ayant une valeur finie en $r = 0$, dites fonctions de première espèce notées j_l où l est un entier (la fonction j_0 n'est rien d'autre que le sinus cardinal) ; et les fonctions non définies en $r = 0$, dites fonctions de deuxième espèce notées n_l (on trouve aussi la notation y_l).

Ces fonctions sont reliées aux fonctions de Bessel

$$j_l(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{l+1/2}(r)$$
$$n_l(r) = (-1)^l \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{-l-1/2}(r)$$

C.2 Convention de signe

On pourra remarquer que, si les fonctions j_l et n_l sont solution de l'équation (C.1), alors leurs opposées le sont aussi. Il faut définir une convention de signe, ou du moins, la vérifier.

Dans le manteau conducteur, le poloïdal P est donné par l'expression (3.24). Dans le cas d'un manteau isolant, son expression est

$$P = a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[-\frac{\varepsilon_l^m}{l+1} \left(\frac{r}{a}\right)^l + \frac{i_l^m}{l} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \right] e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) e^{i\omega t}$$

Dans le cas où la conductivité des différentes couches conductrices du manteau tend vers zéro, à la frontière noyau-manteau, le poloïdal du manteau conducteur doit tendre vers le poloïdal du manteau isolant ; ce qui fixe la convention de signe à adopter. Le comportement en r^l à l'origine est celui de $j_l(r)$, tandis que le comportement en $r^{-(l+1)}$ à l'origine est celui de $n_l(r)$ (d'après (C.6) et (C.7)).

C.3 Relations de récurrence

On note $f_l(r) = \alpha j_l(r) + \beta n_l(r)$ où α et β sont des constantes indépendantes de l

$$(2l+1)f_l = r(f_{l+1} + f_{l-1}) \quad (\text{C.2})$$

$$f_{l-1} = \frac{l+1}{r}f_l + \frac{df_l}{dr} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dr}(rf_l) = -lf_l + rf_{l-1} \quad (\text{C.3})$$

$$r^2(j_l n_{l-1} - j_{l-1} n_l) = 1 \quad (\text{C.4})$$

$$j_{l+1}(r)n_{l-1}(r) - j_{l-1}(r)n_{l+1}(r) = \frac{2l+1}{r^3} \quad (\text{C.5})$$

C.4 Comportement asymptotique à l'origine

$$j_l(r) \sim \frac{1}{(2l+1)!!} r^l \left[1 - \frac{r^2}{2(2l+3)} + O(r^4) \right] \quad (\text{C.6})$$

$$n_l(r) \sim \frac{(2l+1)!!}{2l+1} r^{-l-1} \left[1 - \frac{r^2}{2(2l-1)} + O(r^4) \right] \quad (\text{C.7})$$

$$\text{avec } (2l+1)!! = (2l+1)(2l-1)(2l-3)\dots \quad (\text{C.8})$$

C.5 Expression en terme de fonctions élémentaires

$$\begin{aligned} j_l(r) &= R_l \frac{\sin r}{r} + S_l \frac{\cos r}{r} & R_l &= \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^k (2l-2k)!}{2^{l-2k} (l-2k)! (2k)!} r^{2k-l} \\ n_l(r) &= S_l \frac{\sin r}{r} - R_l \frac{\cos r}{r} & S_l &= \sum_{k=0}^{[(l-1)/2]} \frac{-(-1)^k (2l-2k-1)!}{2^{l-2k-1} (l-2k-1)! (2k+1)!} r^{2k+1-l} \end{aligned}$$

où $[l]$ représente la partie entière de l .

$$\begin{aligned}
j_0(r) &= \frac{\sin r}{r} & n_0(r) &= -\frac{\cos r}{r} \\
j_1(r) &= \frac{\sin r}{r^2} - \frac{\cos r}{r} & n_1(r) &= -\frac{\cos r}{r^2} - \frac{\sin r}{r} \\
j_2(r) &= \frac{\sin r}{r} \left(\frac{3}{r^2} - 1 \right) - \frac{3 \cos r}{r^2} & n_2(r) &= -\frac{\cos r}{r} \left(\frac{3}{r^2} - 1 \right) - \frac{3 \sin r}{r^2}
\end{aligned}$$

C.6 Fonctions de Bessel sphériques d'un argument complexe

Soit le nombre complexe $k = \alpha(1 - i)$ avec α réel.

$$\frac{1}{kr} = \frac{1+i}{2\alpha r} \qquad \frac{1}{(kr)^2} = \frac{i}{2\alpha^2 r^2}$$

On peut exprimer les fonctions sinus et cosinus d'un argument complexe en fonction des fonctions hyperboliques ch et sh

$$\sin(ir) = i \operatorname{sh}(r)$$

$$\cos(ir) = \operatorname{ch}(r)$$

ce qui permet d'établir que

$$\sin(kr) = \sin(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r) - i \cos(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r)$$

$$\cos(kr) = \cos(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r) + i \sin(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r)$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}
j_0(kr) &= \frac{1}{2\alpha r} (\sin(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r) + \cos(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r)) \\
&+ \frac{i}{2\alpha r} (\sin(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r) - \cos(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r)) \\
n_0(kr) &= \frac{1}{2\alpha r} (-\cos(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r) + \sin(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r)) \\
&+ \frac{i}{2\alpha r} (-\cos(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r) - \sin(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r))
\end{aligned}$$

$$j_1(kr) = \frac{1}{2\alpha^2 r^2} (\cos(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r) - i \sin(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r)) - n_0(kr)$$

$$n_1(kr) = \frac{1}{2\alpha^2 r^2} (\sin(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r) - i \cos(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r)) - j_0(kr)$$

$$\begin{aligned}
j_2(kr) &= -\left(\frac{3}{4\alpha^3 r^3} + \frac{1}{2\alpha r}\right) \sin(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r) + \left(\frac{3}{4\alpha^3 r^3} - \frac{1}{2\alpha r}\right) \cos(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r) \\
&+ \frac{3}{2\alpha^2 r^2} \sin(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r) \\
&+ i \left\{ \left(\frac{3}{4\alpha^3 r^3} + \frac{1}{2\alpha r}\right) \cos(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r) + \left(\frac{3}{4\alpha^3 r^3} - \frac{1}{2\alpha r}\right) \sin(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{2\alpha^2 r^2} \cos(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r) \right\} \\
n_2(kr) &= \left(\frac{3}{4\alpha^3 r^3} + \frac{1}{2\alpha r}\right) \cos(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r) + \left(\frac{3}{4\alpha^3 r^3} - \frac{1}{2\alpha r}\right) \sin(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r) \\
&- \frac{3}{2\alpha^2 r^2} \cos(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r) \\
&- i \left\{ \left(\frac{3}{4\alpha^3 r^3} - \frac{1}{2\alpha r}\right) \cos(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r) - \left(\frac{3}{4\alpha^3 r^3} + \frac{1}{2\alpha r}\right) \sin(\alpha r) \operatorname{sh}(\alpha r) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2\alpha^2 r^2} \sin(\alpha r) \operatorname{ch}(\alpha r) \right\}
\end{aligned}$$

Si on suppose que $|k|c \gg 1$ alors

$$\frac{1}{j_0(kc)} = 2\alpha c e^{-\alpha c} \left(\left[\sin(\alpha c) + \cos(\alpha c) \right] - i \left[\sin(\alpha c) - \cos(\alpha c) \right] \right)$$

Si on suppose aussi que $|k|r \gg 1$

$$\frac{j_1(kr)}{j_0(kc)} \sim -\frac{c}{r} e^{-\alpha(c-r)} (\sin[\alpha(c-r)] + i \cos[\alpha(c-r)]) \quad (\text{C.9})$$

C.7 Valeurs numériques

$$j_0(n\pi) = 0 \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{C.10})$$

$$j_1(\pi) = 1/\pi \quad j_1(2\pi) = -1/(2\pi)$$

$$j_2(4.4934) = 0.2172 \quad j_2(7.7253) = -0.12837$$

$$j_3(5.7635) = 0.12069$$

$$j_4(6.9879) = 0.13382$$

Annexe D

Champ magnétique et coordonnées sphériques

Cette annexe ne se veut pas exhaustive. J'y exprime seulement des relations qui sont utiles tout au long de ce travail.

D.1 Décomposition toroïdale-poloïdale

Dans le cas sphérique,

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = \mathbf{rot}(T\vec{r}) + \mathbf{rot} \mathbf{rot}(P\vec{r}) \quad (\text{D.1})$$

Le champ magnétique \vec{B} étant à divergence nulle, ses trois composantes sont reliées entre elles. Il suffit donc de deux scalaires indépendants pour décrire le champ \vec{B} . Le scalaire T est dit toroïdal, le scalaire P poloïdal. On pourra trouver une démonstration de cette équivalence dans la thèse d'Emmanuel Dormy [1997, Chap. 2].

Dans le cas d'un champ axisymétrique, on peut aussi utiliser le développement

$$\vec{B} = \mathbf{rot}(A\vec{e}_\phi) + B\vec{e}_\phi \quad (\text{D.2})$$

La partie poloïdale du champ s'écrit aussi

$$\vec{B}_p = \mathbf{rot} \mathbf{rot}(P\vec{r}) = -\Delta P \vec{r} + \mathbf{grad} \left(\frac{\partial}{\partial r}(rP) \right) \quad (\text{D.3})$$

dont le rotationnel s'écrit

$$\mathbf{rot} \vec{B}_p = -\mathbf{rot}(\Delta P \vec{r}) = - \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\Delta P) \\ \frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta P) \end{vmatrix} \quad (\text{D.4})$$

La composante radiale du rotationnel de la partie toroïdale est

$$\vec{u}_r \cdot \text{rot } \vec{B}_T = \vec{u}_r \cdot [\text{grad}(\text{div}(T\vec{r})) - \Delta(T\vec{r})] = -\frac{2T}{r} \quad (\text{D.5})$$

D.2 Opérateur L^2

En coordonnées sphériques, on peut définir l'opérateur L^2 à partir du laplacien

$$\Delta P = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rP) - \frac{1}{r^2} L^2 P \quad (\text{D.6})$$

C'est l'équivalent non quantique de l'opérateur de moment cinétique. Il vérifie

$$L^2 Y_{l,m} = l(l+1) Y_{l,m} \quad Y_{l,m} \propto e^{im\phi} P_{l,m} \quad (\text{D.7})$$

où $P_{l,m}$ est une fonction de Legendre. On peut alors exprimer facilement la composante radiale du champ magnétique

$$\vec{B} \cdot \vec{r} = L^2 P \quad (\text{D.8})$$

et des courants

$$(\text{rot } \vec{B}) \cdot \vec{r} = L^2 T \quad (\text{D.9})$$

D.3 Champ magnétique poloïdal

Les composantes de la partie poloïdale du champ magnétique sont

$$B_{r,P} = \frac{1}{r} \vec{L}^2 P \quad (\text{D.10})$$

$$B_{\theta,P} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rP) \right) \quad (\text{D.11})$$

$$B_{\phi,P} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rP) \right) \quad (\text{D.12})$$

Bibliographie

- B.-H. AHN, H. W. KROEHL, Y. KAMIDE et E. A. KIHN : Seasonal and solar cycle variations of the auroral electrojet indices. *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.*, 62:1301–1310, 2000.
- H. AKAIKE : Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. *In 2nd Int. Symp. on information Theory*, pages 267–281, 1973. Budapest.
- M. ALEXANDRESCU, D. GIBERT, G. HULOT, J.-L. Le MOUËL et G. SARACCO : Detection of geomagnetic jerks using wavelet analysis. *J. Geophys. Res.*, 100:12557–12572, 1995.
- M. ALEXANDRESCU, D. GIBERT, G. HULOT, J.-L. Le MOUËL et G. SARACCO : Worldwide wavelet analysis of geomagnetic jerks. *J. Geophys. Res.*, 101(B10):21975–21994, 1996.
- M. Manda ALEXANDRESCU, D. GIBERT, J.-L. Le MOUËL, G. HULOT et G. SARACCO : An estimate of average lower mantle conductivity by wavelet analysis of geomagnetic jerks. *J. Geophys. Res.*, 104:17735–17745, 1999.
- ALEXEEV : Modeling of geomagnetic field during magnetic storms and comparison and observations. *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.*, 63:431–440, 2001.
- L. R. ALLDREDGE : A hypothesis for the source of impulses in geomagnetic secular variations. *J. Geophys. Res.*, 80:1571–1578, 1975.
- L. R. ALLDREDGE : A discussion of impulses and jerks in the geomagnetic field. *J. Geophys. Res.*, 89(B6):4403–4412, 1984.
- L. R. ALLDREDGE : More on the alleged 1970 geomagnetic jerks. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 39:255–264, 1985.
- E. E. ANTONOVA et N. Y. GANUSHKINA : Inner magnetosphere currents and their role in the magnetosphere dynamics. *Phys. Chem. Earth (C)*, 25(1-2):23–26, 2000.
- G. BACKUS, R. PARKER et C. CONSTABLE : *Foundations of geomagnetism*. Cambridge University Press, 1996.
- G. E. BACKUS : Application of mantle filter theory to the magnetic jerk of 1969. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 74:713–746, 1983.
- R. J. BANKS : Geomagnetic variations and the electrical conductivity of the upper mantle. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 17:457–487, 1969.
- R. J. BEAMISH, D. J. NOAKES, G. A. MCFARLANE, L. KLYASHTORIN, V. V. IVANOV et V. KURASHOV : The regime concept and natural trends in the production of Pacific salmon. *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic sciences*, 56(3):516–526, 1999.
- J. BLOXHAM, S. ZATMAN et M. DUMBERRY : The origin of geomagnetic jerks. *Nature*, 420:65–68, 2002.

- D. H. BOTELER, R. PIRJOLA et L. TRICHTCHENKO : On calculating the electric and magnetic fields produced in technological systems at the Earth's surface by a "wide" electrojet. *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.*, 62:1311–1315, 2000.
- J. BOUSSINESQ : *Théorie analytique de la chaleur*, volume 2. Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- S. I. BRAGINSKY : Torsional magnetohydrodynamic vibrations in the Earth's core and variations in day length. *Geomag. Aeron.*, 10:3–12, 1970.
- S. I. BRAGINSKY : MAC-Oscillations of the hidden ocean of the core. *J. Geomag. Geoelectr.*, 45:1517–1538, 1993.
- S. I. BRAGINSKY : Magnetic Rossby waves in the stratified ocean of the core, and topographic core-mantle coupling. *Earth Planets Space*, 50:641–649, 1998.
- S. I. BRAGINSKY : Dynamics of the stably stratified ocean at the top of the core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1999.
- B. A. BUFFETT : Free oscillations in the length of day : interferences on physical properties near the core-mantle boundary. In E. Knittle M. GURNIS, M. E. Wyss et B. A. BUFFETT, éditeurs : *The Core-Mantle Boundary Region*, volume 28 de *Geodynamics Series*, pages 153–165. AGU, 1988.
- B. A. BUFFETT, H. E. HUPPERT, J. R. LISTER et A. W. WOODS : On the thermal evolution of the Earth's core. *J. Geophys. Res.*, 101(B4):7989–8006, 1996.
- B. A. BUFFETT, P. M. MATHEWS et T. A. HERRING : Modeling of nutation and precession : Effects of electromagnetic coupling. *J. Geophys. Res.*, 107(B4), 2002.
- E. C. BULLARD, C. FREEDMAN, H. GELLMAN et J. NIXON : The westward drift of the earth's magnetic field. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A243:67–92, 1950.
- E. C. BULLARD et H. GELLMAN : Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A247:213–278, 1954.
- W. H. CAMPBELL, C. E. BARTON, F. H. CHAMALAUN et W. WELSH : Quiet-day ionospheric currents and their application to upper mantle conductivity in Australia. *Earth Planets Space*, 50:347–360, 1998.
- P. CARDIN, D. BRITO, D. JAULT, H.-C. NATAF et J.-P. MASSON : Towards a rapidly rotating liquid sodium dynamo experiment. *Magnetohydrodynamics*, 38:177–189, 2002.
- A. CHAMBODUT et M. MANDEA : Evidence for geomagnetic jerks in comprehensive models. *Earth Planets Space*, 57:139–149, 2005.
- E. CHANDRASEKHAR : Geo-electrical of the mantle beneath the Indian region derived from the 27-days variation and its harmonics. *Earth Planets Space*, 52:587–594, 2000.
- G. CINI CASTOGNOLI, G. BONINO et A. PROVENZALE : The thermoluminescence profile of a recent sea sediment core and the solar variability. *Solar Physics*, 117:187–197, 1988.
- S. CONSTABLE : Constraints on mantle conductivity from field and laboratory measurements. *J. Geomag. Geoelectr.*, 45:707–728, 1993.
- S. CONSTABLE et C. CONSTABLE : Observing geomagnetic induction in magnetic satellite measurements and associated implications for mantle conductivity. *Geochem. Geophys. Geosys.*, 5(1), 2004.
- V. COURTILLOT, J. DUCRUUX et J.-L. Le MOUËL : Sur une accélération récente de la variation séculaire de champ magnétique terrestre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 287:1095–1098, 1978.

- V. COURTILLOT et J. L. LE MOUËL : On the long-period variations of the Earth's magnetic field from 2 months to 20 years. *J. Geophys. Res.*, 81:2941–2950, 1976.
- V. COURTILLOT et J. L. LE MOUËL : Geomagnetic secular variation impulses. *Nature*, 311:709–716, 1984.
- V. COURTILLOT et J.-L. Le MOUËL : Time variations of the Earth's magnetic field : From daily to secular. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 16:389–476, 1988.
- R. G. CURIE : Magnetic shielding properties of the Earth's mantle. *J. Geophys. Res.*, 72:2623–2633, 1967.
- I. A. DAGLIS, R. M. THORNE, W. BAUMJOHANN et S. ORSINI : The terrestrial ring current : Origin, formation, and decay. *Rev. Geophys.*, 37:407–438, 1999.
- F. A. DAHLEN : The effect of data windows on the estimation of free oscillation parameters. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 69:537–549, 1982.
- C. de GROOT-HEDLIN et S. CONSTABLE : Occam's inversion and the North American Central Plains Electrical Anomaly. *J. Geomag. Geoelectr.*, 45:985–999, 1993.
- G. A. de WIJS, G. KRESSE, L. VOČADLO, D. DOBSON, D. ALFÈ, M. J. GILLAN et G. D. PRICE : The viscosity of liquid iron at the physical conditions of the Earth's core. *Nature*, 1998.
- J. A. DEFRAIGNE, V. DEHANT et J. WAHR : Internal loading of an inhomogenous compressible Earth with phase boundaries. *Geophys. J. Int.*, 125:173–192, 1996.
- B. DELEPLACE : *Approche expérimentale de la turbulence par mesures de viscosité apparente dans les fluides en rotation. Application au couplage visco-magnétique de l'interface noyau-manteau*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2005.
- E. M. DIDWALL : The electrical conductivity of the upper mantle as estimated from satellite magnetic field data. *J. Geophys. Res.*, 89:537–542, 1984.
- D. P. DOBSON et J. P. BRODHOLT : The electrical conductivity of the lower mantle phase magnesiowüstite at high temperatures and pressures. *J. Geophys. Res.*, 105(B1):531–538, 2000.
- E. DORMY : *Modélisation numérique de la dynamo terrestre*. Thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris, 1997.
- E. DORMY, J.-P. VALET et V. COURTILLOT : Numerical models of the geodynamo and observational constraints. *Geochem. Geophys. Geosys.*, 1:62, 2000.
- V. DOUMOUYA, Y. COHEN, B. R. ARORA et K. YUMOTO : Local time and longitude dependence of the equatorial electrojet magnetic effects. *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.*, 65:1265–1282, 2003.
- J. DUCRUIX, V. COURTILLOT et J.-L. Le MOUËL : The late 1960s secular variation impulse, the eleven year magnetic variation and the electrical conductivity of the deep mantle. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 61:73–94, 1980.
- S. DUHAU et A. MARTINEZ : On the origin of the fluctuations in the length of day and in the geomagnetic field on a decadal time scale. *Geophys. Res. Lett.*, 22:3283–3286, 1995.
- M. DUMBERRY et J. BLOXHAM : Torque balance, Taylor's constraint and torsional oscillations in a numerical model of the geodynamo. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 140:29–51, 2003.

- M. DUMBERRY et J. BLOXHAM : Variations in the Earth's gravity field caused by torsional oscillations in the core. *Geophys. J. Int.*, 159:417–434, 2004. doi : 10.1111/j.1365-246X.2004.02402.x.
- A. M. DZIEWONSKI et D. L. ANDERSON : Preliminary reference earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 25:297–356, 1981.
- C. EYMIN : *Étude des mouvements à la surface du noyau terrestre : du 17ème au 21 ème siècle*. Thèse de doctorat, Institut de Physique du globe de Paris, 2004.
- J. M. FORBES : The Equatorial electrojet. *Rev. Geophys.*, 19:469–504, 1981.
- A. FORTE et R. PELTIER : Viscous flow model of global geophysical observables 1. Forward problem. *J. Geophys. Res.*, 96:20131–20159, 1991.
- M. FRIGO et S. G. JOHNSON : The design and implementation of FFTW3. *Proceedings of the IEEE*, 93(2):216–231, 2005. Special issue on "Program Generation, Optimization, and Platform Adaptation".
- E. FRIIS-CHRISTENSEN et K. LASSEN : Length of the solar cycle : an indicator of solar activity closely associated with climate. *Science*, 254:698–700, 1991.
- I. FUJII et A. SCHULTZ : The 3d electromagnetic response of the Earth to ring current and auroral oval excitation. *Geophys. J. Int.*, 151:689–709, 2002.
- A. GAILITIS, O. LIELAUSIS, S. DEMENTÉV, E. PLATACIS, A. CIFERSONS, G. GERBETH, T. GUNDRUM, F. STEFANI, M. CHRISTEN, H. HANEL et G. WILL : Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility. *Phys. Rev. Lett.*, 84:4365–4368, 2000.
- G. P. GALDI et B. STRAUGHAN, éditeurs. *Energy stability and convection*. Longman Scientific ans technical, 1988.
- R. GARCIA et A. SOURIAU : Amplitude of the core-mantle boundary topography estimated by stochastic analyses of core phases. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 117:345–359, 2000.
- G. D. GARLAND : The significance of terrestrial electrical conductivity variations. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 9:147–174, 1981.
- J. GAVORET, D. GIBERT, M. MENVIELLE et J. L. Le MOUËL : Long-term variations of the external and internal components of the Earth's magnetic field. *J. Geophys. Res.*, 91:4787–4796, 1986.
- D. GIBERT, M. HOLDSCHNEIDER et J.-L. Le MOUËL : Wavelet analysis of the Chandler wobble. *J. Geophys. Res.*, 103(B11):27069–27090, 1998.
- G. GLATZMAIER et P. ROBERTS : A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature*, 377:203, 1995.
- G. A. GLATZMAIER et P. H. ROBERTS : An anelastic evolutionary geodynamo evolution driven by compositional and thermal convection. *Physica D*, 97:81–94, 1996.
- W. GLEISSBERG : The eighty-year sunspot cycle. *J. Br. Astron. Assoc.*, 68:148–152, 1958.
- J. D. GOLDSTEIN : The effect of coordinate system rotations on spherical harmonic expansions : a numerical method. *J. Geophys. Res.*, 89(B6):4413–4418, 1984.
- M. GRANDE, C. H. PERRY, A. HALL, J. FENNELL et B. WILKEN : Survey of ring current composition during magnetic storms. *Adv. Space Res.*, 20(3):321–326, 1997.
- H. P. GREENSPAN : *The theory of rotating fluids*. Breukelen Press, 1968.

- D. GUBBINS et L. TOMLISON : Secular variation from monthly means from Apia and Amberley magnetic observatories. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 86:603–616, 1986.
- J. M. HARWOOD et S. R. C. MALIN : Sunspot cycle influence on the geomagnetic field. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 50:605–619, 1977.
- R. HIDE, D. H. BOGGS et J. O. DICKEY : Angular momentum fluctuations within the Earth's liquid core and torsional oscillations of the core-mantle system. *Geophys. J. Int.*, 143:777–786, 2000.
- R. V. HILMER et G.-H. VOIGT : A magnetospheric magnetic field model with flexible current systems driven by independent parameters. *J. Geophys. Res.*, 100(A4):5613–5626, 1995.
- R. HOLME et O. de VIRON : Geomagnetic jerks and a high-resolution length-of-day profile for core studies. *Geophys. J. Int.*, 2004. doi : 10.1111/j.1365-246X.2004.02510.x.
- D. IVERS, R. STENING, J. TURNER et D. WINCH : Equatorial electrojet from ørsted scalar magnetic field observations. *J. Geophys. Res.*, 108:1061–1070, 2003.
- A. JACKSON, J. BLOXHAM et D. GUBBINS : Time-dependent flow at the core surface and conservation of angular momentum in the coupled Core-Mantle system. In J. L. Le MOUËL, D. E. SMYLLIE et T. HERRING, éditeurs : *Dynamics of the Earth's Deep Interior and Earth Rotation*, volume 72 de *AGU Geophysical Monograph*, pages 97–107. 1993.
- A. JACKSON, A. JONKERS et M. WALKER : Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A358:957–990, 2000.
- J. D. JACKSON : *Classical Electrodynamics*. John Wiley, 1975.
- J. A. JACOBS, éditeur. *Geomagnetism*, volume 2. Academic Press, 1987.
- G. JADHAV, M. RAJARAM et R. RAJARAM : Main field control of the equatorial electrojet : a preliminary study from the ørsted data. *Journal of Geodynamics*, 33:157–171, 2002.
- A. JAMESON : A demonstration of alfvén waves. part 1. generation of standing waves. *J. Fluid Mech.*, 19:513–527, 1964.
- D. JAULT : Sur l'inhibition de la régénération du champ magnétique dans certains modèles de dynamo planétaire en présence d'une graine solide. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323, série IIa:451–458, 1996.
- D. JAULT : Electromagnetic and topographic coupling, and LOD variations. In C. A. JONES, A. M. SOWARD et K. ZHANG, éditeurs : *Earth's Core and Lower Mantle*, The Fluid Mechanics of Geophysics and Astrophysics, pages 56–76. Taylor and Francis, 2003.
- D. JAULT et P. CARDIN : On dynamic geodynamo models with imposed velocity as energy source. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 111:75–81, 1999.
- D. JAULT, C. GIRE et J. L. Le MOUËL : Westward drift, core motions and exchanges of angular momentum between core and mantle. *Nature*, 333:353–356, 1988.
- D. JAULT et G. LÉGAUT : Astrophysical and geophysical fluid dynamics, and dynamos. In D. W. HUGHES, A. M. SOWARD, C. A. JONES et N. O. WEISS, éditeurs : *Earth's Core and Lower Mantle*, The Fluid Mechanics of Geophysics and Astrophysics, pages 277–293. CRC Press, 2005.
- A. KUVSHINOV, H. UTADA, D. AVDEEV et T. KOYAMA : 3-d modelling and analysis of Dst C-responses in the North Pacific Ocean region, revisited. *Geophys. J. Int.*, 160:505–526, 2005.

- S. LABROSSE : Thermal and magnetic evolution of the Earth's core. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 140:127–143, 2003.
- G. LE, C. T. RUSSEL et K. TAKAHASHI : Morphology of the ring current derived from field observations. *Annales Geophysicae*, 22:1267–1295, 2004.
- G.-M. LE et J.-L. WANG : Wavelet analysis of several important periodic properties in the relative sunspot numbers. *Chin. J. Astron. Astrophys.*, 3(5):391–394, 2003.
- J. LILENSTEN et P. L. BLELLY : *Du soleil à la terre : aéronomie et météorologie de l'espace*. Presses Universitaires de Grenoble, 1999.
- J. R. LISTER et B. A. BUFFETT : The strength and efficiency of thermal and compositional convection in the geodynamo. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1995.
- H. LÜHR, S. MAUS et M. ROTHER : Noon-time equatorial electrojet : its spatial features as determined by the champ satellite. *J. Geophys. Res.*, 109:A01306, 2004. doi :10.1029/2002JA009656.
- S. MACMILLAN : A geomagnetic jerk for the early 1990's. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 137:189–192, 1996.
- S. R. C. MALIN et B. M. HODDER : Was the 1970 geomagnetic jerk of internal or external origin? *Nature*, 296:726–728, 1982.
- M. MANDEA, E. BELLANGER et J.-L. Le MOUËL : A geomagnetic jerk for the end of the 20th century? *Earth Planet. Sci. Lett.*, 183:369–373, 2000.
- I. MARTINEZ, Y. WANG, F. GUYOT, R. C. LIEBERMANN et J.-C. DOUKHAN : Microstructures and iron partitioning in (Mg,Fe)SiO₃ perovskite- (Mg,Fe)O magnesiowüstite assemblages : an analytical transmission electron microscopy study. *J. Geophys. Res.*, 102(B3):5265–5280, 1997.
- P. M. MATHEWS, B. A. BUFFETT, T. A. HERRING et I. I. SHAPIRO : Forced nutations of the earth : influence of inner core dynamics. 2. Numerical results and comparison. *J. Geophys. Res.*, 96(B5), 1991.
- P. M. MATHEWS, T. A. HERRING et B. A. BUFFETT : Modeling of nutation and precession : New nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior. *J. Geophys. Res.*, 107(B4), 2002.
- S. MAUS et P. WEIDELT : Separating the magnetospheric disturbance field into external and transient internal contributions using a 1D conductivity model of the Earth. *Geophys. Res. Lett.*, 31:L12614, 2004. doi : 10.1029/2004GL020232.
- J. MAX et J.-L. LACOUME : *Méthodes et techniques de traitement du signal et application aux mesures physiques. T1. Principes généraux et méthodes classiques*. Masson, 1996.
- K. L. McDONALD : Penetration of the geomagnetic secular field through a mantle with variable conductivity. *J. Geophys. Res.*, 62:117–141, 1957.
- P. L. MCFADDEN, R. T. MERRILL et M. W. McELHINNY : Non-linear processes in the geodynamo : Paleomagnetic evidence. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 83:111–126, 1985.
- M. G. McLEOD : Magnetospheric and ionospheric signals in magnetic observatory monthly means : Electrical conductivity of the deep mantle. *J. Geophys. Res.*, 99(B7):13577–13590, 1994.
- P. De MICHELIS, L. CAFARELLA et A. MELONI : Worldwide character of the 1991 geomagnetic jerk. *Geophys. Res. Lett.*, 25(3):377–380, 1998.

- H. MORITZ : Geodetic Reference System. *Bulletin Géodésique*, 54(3), 1980.
- J. E. MOUND : Electromagnetic torques in the core and resonant excitation of decadal polar motion. *Geophys. J. Int.*, 160:721–728, 2005. doi : 10.1111/j.1365-246X.2004.02495.x.
- J. E. MOUND et B. A. BUFFETT : Interannual oscillations in length of day : Implications for the structure of the mantle and core. *J. Geophys. Res.*, 108(B7):2334–2351, 2003. doi : 10.1029/2002JB002054.
- H. NAGAO, T. IYEMORI, T. HIGUCHI, S. NAKANO et T. ARAKI : Local time features of geomagnetic jerks. *Earth Planets Space*, 54:119–131, 2002.
- H.-C. NATAF : Dynamo and convection experiments. In C. A. JONES, A. M. SOWARD et K. ZHANG, éditeurs : *Earth's Core and Lower Mantle*, The Fluid Mechanics of Geophysics and Astrophysics, pages 153–179. Taylor and Francis, 2003.
- M. G. OGURTSOV, Yu. A. NAGOVITSYN, G. . KOCHAROV et H. JUNGNER : Long-period cycles of the Sun's activity recorded in direct solar data and proxies. *Solar Physics*, 211:371–394, 2002.
- N. OLSEN : The electrical conductivity of the mantle beneath Europe derived from C-responses from 3 to 720 hr. *Geophys. J. Int.*, 133:298–308, 1998.
- N. OLSEN : Long-period (30 days-1 year) electromagnetic sounding and the electrical conductivity of the lower mantle beneath Europe. *Geophys. J. Int.*, 138:179–187, 1999.
- A. PAIS et G. HULOT : Length of day decade variations, torsional oscillations and inner core superrotation : evidence from recovered core surface zonal flows. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 118:291–316, 2000.
- A. N. PERISTYKH et P. E. DAMON : Persistence of the 88-year solar cycle over the last ~ 12,000 years : Evidence from cosmogenic isotopes. *J. Geophys. Res.*, 108(A1):1003, 2003. doi :10.1029/2002JA009390.
- J. PEYRONNEAU et J.-P. POIRIER : Electrical conductivity of the Earth's lower mantle. *Nature*, 342:537–539, 1989.
- A. D. RICHMOND : Modeling equatorial ionospheric electric fields. *J. Atmos. Terr. Phys.*, 57(10):1103–1115, 1995.
- M. RIEUTORD : *Une introduction à la dynamique des fluides*. Masson, 1997.
- Y. R. RIVIN : A possible source of nonlinear fluctuations in the diurnal rotation rate of the Earth with 10^4 to 10^5 years. *Geomag. Aeron.*, 25(5):696–698, 1985.
- P. H. ROBERTS : *An introduction to magnetohydrodynamics*. American Elsevier Publishing Compagny, Inc, 1967.
- R. G. ROBERTS : The long period electromagnetic response of the Earth. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 78:547–572, 1984.
- T. J. SABAKA, N. OLSEN et R. A. LANGE : A comprehensive model of the quiet-time, near-Earth magnetic field : phase 3. *Geophys. J. Int.*, 151:32–68, 2002.
- T. J. SABAKA, N. OLSEN et M. E. PURUCKER : Extending comprehensive models of the Earth's magnetic field with δ and χ data. *Geophys. J. Int.*, 2004. doi : 10.1111/j.1365-246X.2004.02421.x.
- N. SCHAEFFER : *Instabilités, turbulence et dynamo dans une couche de fluide cisailée en rotation*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2004.

- N. SCHAEFFER et P. CARDIN : Quasi-geostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer. <http://arxiv.org/abs/physics/0312129>, 2005. soumis.
- U. SCHMUCKER : Magnetic and electric fields due to electromagnetic induction by external sources. In *Landolt-Börnstein, New Series, 5/2b*, pages 100–125. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1985.
- R. A. SECCO et H. H. SCLOESSIN : The electrical resistivity of solid and liquid Fe at pressures up to 7 GPa. *J. Geophys. Res.*, 94(B5):5887–5894, 1989.
- V. Yu. SEMENOV et W. JOZWIAK : Model of the geoelectrical structure of the mid- and lower mantle in the Europe-Asia region. *Geophys. J. Int.*, 138:549–552, 1999.
- T. SHIRAI, T. FUKUSHIMA et Z. MALKIN : Detection of phase disturbances of free core nutation of the Earth and their concurrence with geomagnetic jerks. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 57:151–155, 2005.
- L. Z. SIZOVA : The field-aligned currents effect on equatorial geomagnetic field variations. *Adv. Space Res.*, 30(10):2247–2252, 2002.
- E. A. SPIEGEL et G. VERONIS : On the boussinesq approximation for a compressible fluid. *Astrophys. J.*, 131:442–447, 1960.
- S. V. STARCHENKO et C. A. JONES : Typical velocities and magnetic field strengths in planetary interiors. *Icarus*, 157:426–435, 2002. doi :10.1006/icar.2002.6842.
- R. STIEGLITZ et U. MÜLLER : Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Phys. Fluids*, 13:561–564, 2001.
- E. K. M. SZE et R. D. VAN DER HILST : Core mantle boundary topography from short period PcP, PKP and PKKP data. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 135:27–46, 2003.
- F. TAKAHASHI, M. MATSUSHIMA et Y. HONKURA : Simulations of a quasi-Taylor state geomagnetic field including polarity reversals on the Earth Simulator. *Science*, 309:459–461, 2005.
- P. TARITS, S. HAUNTOT et F. PERRIER : Water in the mantle, Results from electrical conductivity beneath the French Alps. *Geophys. Res. Lett.*, 31(L06612), 2004. doi :10.1029/2003GL019277.
- J. B. TAYLOR : The magneto-hydrodynamics of a rotating fluid and the Earth's dynamo problem. *Proc. R. Soc. Lond.*, A274:274–283, 1963.
- H. UTADA, T. KOYAMA, H. SHIMIZU et A. D. CHAVE : A semi-global reference model for electrical conductivity in the mid-mantle beneath the north Pacific region. *Geophys. Res. Lett.*, 30(4):1194, 2003. doi : 10.1029/2002GL016092.
- A. VIGOUROUX : *Etude de la variabilité solaire à long terme*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1996.
- J. VIRIEUX : Séismes : rupture et onde. Mémoire de D.E.A., Université Denis Diderot, Paris, 1986.
- L. VOČADLO, D. ALFÈ, M. J. GILLAN et G. D. PRICE : The properties of iron under core conditions from first principles calculations. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 2003.
- A. M. WEBER et E. B. ROBERTS : The 1950 world isogonic chart. *J. Geophys. Res.*, 56(1):81, 1951.
- Y. XU, C. MCCAMMON et B. T. POE : The effect alumina on the electrical conductivity of silicate perovskite. *Science*, 282:922–924, 1998.

S. ZATMAN et J. BLOXHAM : Torsional oscillations and the magnetic field within the Earth's core. *Nature*, 388:760–763, 1997.

S. ZATMAN et J. BLOXHAM : A one-dimensionnal map of B_s from torsional oscillations of the Earth's core. In M. GUNIS, M. E. WYSESSION, E. KNITTLE et B. A. BUFFETT, éditeurs : *The Core-Mantle Boundary Region*, volume 28 de *Geodynamics Series*, pages 183–196. AGU, 1998.

S. ZATMAN et J. BLOXHAM : On the dynamical implications of models of B_s in the Earth's core. *Geophys. J. Int.*, 138:679–686, 1999.